José. E. Ruzzante

Física de la propagación
de las ondas elásticas
y algunas aplicaciones

Ondas Elásticas en Sólidos

Año 2020
ISBN: 978-987-86-6502-3

Copyright © 2020 José E. Ruzzante

AUTOR: Dr. José Ruzzante.

Email: ruzzante@gmail.com

FOTOGRAFÍA DE COBERTURA: Tomada por el autor en Fray Bentos, R.O. del Uruguay.

DISEÑO DE COBERTURA E INTERIOR: Lic. Stella Maris Spurio.

Ruzzante, José
Ondas elásticas en sólidos / José Ruzzante. - 1a ed . - Florida : José Ruzzante, 2020.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-86-6502-3

1. Mecánica de las Ondas. I. Título.
CDD 531.33

Queda hecho el depósito que indica la Ley 11723.

Todos los derechos reservados.

Se autoriza su reproducción para uso académico o educativo citando la fuente. Para uso comercial, ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, incluyendo fotocopiado, grabación o cualquier otro sistema de archivo, sin previa autorización escrita del autor/editor.

Primera edición: 2020.

Impreso en Argentina – Printed in Argentina.

ISBN: 978-987-86-6502-3

ONDAS ELÁSTICAS EN SÓLIDOS

Física de la propagación de las ondas elásticas y algunas aplicaciones

Autor
José. E. Ruzzante

Año 2020

P R Ó L O G O

This new book on Elastic Waves in Solids (Ondas Elásticas en Sólidos) by Dr. Ruzzante provides a timely addition to the literature in solid mechanics, especially for those working in structural health monitoring and nondestructive evaluation.

It covers the basic mathematical tools before tackling advanced treatment on wave propagation from isotropic to anisotropic media. Anyone who have studied basic partial differential equations can greatly benefit from this and progress to applying the knowledge gained to specialized wave mechanics problems.

Kanji Ono

University of California, Los Angeles

P R E F A C I O

Este apunte, sobre ondas elásticas nace de distintos cursos y seminarios dictados en diferentes ámbitos universitarios, algunos de ellos a alumnos de grado y de posgrado, en las especialidades de Ciencia de los Materiales, Doctorado en Ingeniería e Ingeniería Acústica.

Estimo que este apunte puede ser de utilidad a todas aquellas carreras que de alguna manera utilizan las ondas elásticas, ya sean como técnica o bien con otro beneficio. Se ha comprobado que, en los últimos años, se multiplicaron enormemente las aplicaciones y componentes de nanotecnología que utilizan estas ondas.

Se trató de desarrollar la gran mayoría de las demostraciones matemáticas. En varios ítems se usaron tensores cartesianos, complementándose con algunas clases extras sobre este tema, a los cursos que no estaban familiarizados con ellos.

Si bien se hace uso del formalismo matemático necesario, se trató de resaltar la idea conceptual del fenómeno, en algunos casos “jugando” con la misma, siguiendo las enseñanzas de Carl Jung sobre el pensamiento creativo.

Para finalizar transcribo un viejo proverbio talmúdico, muy actual por lo menos para mí: *“He aprendido mucho de mis maestros, más aún de mis colegas, pero muchísimo más de mis alumnos”.*

El autor

A G R A D E C I M I E N T O S

Quiero hacer explícito mi agradecimiento a las siguientes personas:

Don Dante Ruzzante (Aladino)

Dr. Roberto Suárez Ántola, mi amigo yorugua, por su apoyo final.

Ali, Verónica, Valentina, Violeta, Javi, siempre presentes.

Y muy particularmente a la Lic. Stella Maris Spurio por su invalorable ayuda en el diseño y edición de este libro.

El autor

B I O G R A F Í A D E L A U T O R

José E. Ruzzante

El Autor es Licenciado en Física, con título otorgado por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional de Buenos Aires, y recibido de Doctor en Física en la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Se especializó en Emisión Acústica en el CISE, Milán - Italia.

Fue Director Científico del “International Centre for Earth Sciences” (ICES) que pertenece a la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA) y a la Universidad Nacional de Cuyo (UNC), Mendoza – Argentina

Participó, junto a otros dos autores, en la escritura del libro *"Ultrasonido y Emisión Acústica para Ingenieros y Estudiantes de Ingeniería",* accesible desde: https://www.researchgate.net/publication/341655775_Ultrasonido-y-Emision-Acustica-para-Ingenieros-y-Estudiantes-de-Ingenieria.

Actualmente es:

- Miembro Fundador del Grupo Latinoamericano de Emisión Acústica (GLEA);
- Profesor Consulto de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN);
- Instructor ASME (American Society of Mechanical Engineers);
- Profesor Titular en la Universidad Nacional de Tres de Febrero (UNTREF) en la carrera de Ingeniería en Sonido;
- Responsable del Grupo de Investigación en Acústica Subacuática (GIAS) de la misma Universidad.

Email: ruzzante@gmail.com

T E M A R I O

INTRODUCCIÓN ..... - 10 -

Capítulo 1 - ONDAS EN 1D ..... - 13 -

1.1 Función de Onda Plana ..... - 13 -

1.2 Ecuación diferencial de las ondas planas ..... - 14 -

1.3 Condiciones iniciales y de frontera ..... - 15 -

1.4 Algo más sobre la ecuación de onda ..... - 16 -

1.5 Otra deducción de la ecuación de onda ..... - 18 -

1.6 Ondas transversales en una varilla ..... - 19 -

1.7 Ondas de torsión en una varilla ..... - 20 -

1.8 Ondas longitudinales en varillas ..... - 20 -

1.9 Caso de la ecuación de onda no lineal ..... - 21 -

1.10 Obtención de la ecuación de la onda por análisis dimensional ..... - 22 -

1.11 Solución general de la ecuación de onda unidireccional ..... - 23 -

1.12 Condiciones de contorno ..... - 29 -

1.13 Ondas Armónicas ..... - 32 -

1.14 Para recordar ..... - 33 -

1.15 Notación compleja ..... - 34 -

1.16 Superposición de ondas ..... - 34 -

1.17 Suma de ondas de distinta frecuencia (Batido) ..... - 39 -

1.18 El sonido en el agua de mar ..... - 40 -

1.19 Propagación de información por medio de ondas elásticas ..... - 41 -

1.20 Ecuación de onda con amortiguamiento ..... - 44 -

1.21 Impedancia Acústica ..... - 45 -

Capítulo 2 - CARACTERÍSTICA DE LOS SÓLIDOS ..... - 48 -

2.1 Ecuación constitutiva ..... - 48 -

2.2 Anisotropía y homogeneidad ..... - 48 -

2.3 Módulos y Constantes de los Materiales ..... - 50 -

2.4 Sobre el tensor de desplazamiento ..... - 51 -

2.5 Sobre el tensor de tensiones ..... - 54 -
2.6 Concepto de tensión ..... - 55 -
2.7 Formula de Cauchy - Tetraedro de Cauchy ..... - 57 -
2.8 Ley Hooke Generalizada ..... - 58 -
2.9 Comportamiento de los materiales frente a cargas uniaxiales ..... - 62 -
2.10 Energía de Deformación ..... - 62 -
2.11 Materiales Hipoelásticos ..... - 63 -
2.12 Notación de Voigt ..... - 66 -
2.13 Reducción de las constantes en casos de simetrías ..... - 67 -
2.14 Medio Isótropo ..... - 71 -

Capítulo 3 - ONDAS EN 3D ..... - 78 -
3.1 Fuentes y tipos de ondas ..... - 78 -
3.2 Propagación de una onda plana en una dirección arbitraria ..... - 79 -
3.3 Atenuación y Absorción ..... - 83 -
3.4 Propagación de Ondas Elásticas en medios elástico, infinito, isótropo y homogéneo ..... - 88 -
3.5 Propagación de una onda en un medio con simetría esférica ..... - 96 -
3.6 Expresión de las tensiones en función de los potenciales. ..... - 97 -
3.7 Otras formas de escribir la ecuación de onda ..... - 99 -
3.8 Energía de las ondas elásticas ..... - 100 -
3.9 Energía en ondas armónicas ..... - 102 -
3.10 El versor l, dirección de propagación de la onda, imaginario ..... - 105 -
3.11 Gráficos de Lentitud ..... - 106 -
3.12 Reflexión, Refracción, Lentitud ..... - 112 -
3.13 Generalización de la ley de Descartes-Snell, Conversión de modos ..... - 115 -
3.14 Ondas P-SV y SH ..... - 120 -
3.15 Polarización y vector Polarización ..... - 124 -

Capítulo 4 - TRANSFORMA DE FOURIER Y PROPIEDADES ..... - 132 -
4.1 Definición de transformada de Fourier ..... - 132 -
4.2 Algunas de las propiedades de la transformada de Fourier ..... - 134 -
4.3 Convolución ..... - 139 -

4.4 Velocidad de Grupo, Ondas dispersivas - 141 -
4.5 Generalización - 143 -
4.6 Ondas dispersivas - 147 -
4.7 Medios dispersivos normal y anómalos - 154 -
4.8 Gráficas y algo más - 157 -
4.9 Alternativas para hallar la velocidad de grupo - 159 -
4.10 Significado físico de la velocidad de grupo - 161 -
4.11 Frecuencia y número de onda - 161 -
4.12 Fourier aplicado a la ecuación de onda, problema de condiciones iniciales - 163 -

Capítulo 5 - SÓLIDOS ANISÓTROPOS - 173 -
5.1 Ondas en medios anisótropos - 173 -
5.2 Estudio de las velocidades en el plano basal de una estructura hexagonal - 203 -
5.3 Birrefringencia - 207 -
5.4 Generalización - 208 -
5.5 Caso de estructuras ortotrópico - 209 -
5.6 Grafica de velocidad de fase - 212 -
5.7 Cálculo de la velocidad de grupo, graficas de lentitud y velocidad de grupo para estructuras octaédricas - 214 -
5.8 Diferencia en la posición de la fuente puntual - 220 -
5.9 Ecuación Eikonal, Teoría del Rayo - 222 -
5.10 Ecuación de la Trayectoria del Rayo - 224 -
5.11 Nota (solo para curiosos) - 232 -

Capítulo 6 - ONDAS SUPERFICIALES - 235 -
6.1 Ondas de Rayleigh - 235 -
6.2 Ondas de Love - 249 -

BIBLIOGRAFÍA - 266 -
Ondas - 266 -
Tensores - 267 -

"Claro que lo entiendo.
Incluso un niño de cinco años podría entenderlo.
¡Que me traigan un niño de cinco años!"
Groucho Marx

INTRODUCCIÓN

Un cuerpo cualquiera está formado por un conglomerado de partículas que interactúan entre sí, dando origen a los sólidos. Por otro lado, tenemos la imagen de las perturbaciones que se generan en la superficie de un lago y que se propagan a lo largo de él, este fenómeno es lo que llamamos ondas. No conocemos más cosas que partículas y ondas, luego si tenemos que explicar algo seguramente lo haremos por intermedio de las partículas o de las ondas. Con estas dos representaciones pretendemos explicar la mayoría de los fenómenos naturales.

En este trabajo solo nos dedicaremos al estudio de un tipo particular de onda, las llamadas ondas elásticas o mecánicas. Se originan al desplazarse alguna porción de un medio elástico de su posición de equilibrio. Luego esta perturbación se transmite a las porciones del material vecinas y de ésta a las siguientes. Esta perturbación se propaga con una velocidad finita que depende de las propiedades de los medios, elásticos e inerciales. La propiedad elástica da lugar a las fuerzas restauradoras sobre los elementos que se desplaza del equilibrio y es la inercial que responde a esta fuerza restaurando. Las partículas del medio tan solo oscilan en su posición de equilibrio. Lo único que se traslada o transmite es el "movimiento" (energía). Para que se propaguen las ondas mecánicas es necesario un soporte o medio material, que en nuestro caso son los sólidos o los fluidos. Es así que el sonido requiere de un gas, (aire) para propagarse. En el vacío no existe sonidos, si ondas mecánicas que se propaguen en los sólidos.

Las ondas elásticas no son el único tipo de onda que existe, podemos mencionar, las electromagnéticas, con características distintas a las ondas elásticas, por ejemplo, no requieren un medio para propagarse.

Las ondas reciben el nombre de la magnitud física cuya perturbación se propaga, ejemplo: ondas de desplazamiento, ondas de presión, ondas electromagnéticas, ondas térmicas. Como algunas magnitudes físicas puede ser vectorial o escalar, luego las ondas pueden tener carácter vectorial o escalar, como veremos más adelante. También recordamos de los cursos elementales de física la clasificación

en ondas longitudinales y transversales, dependiendo del movimiento de las partículas respecto a la dirección de propagación.

Las podemos clasificar de varias maneras, ejemplo, por la dimensión espacial en que se propagan: unidimensional, bidimensional, etc. Que es el que usaremos aquí.

Una onda puede tener una duración muy grande (infinita) o bien puede consistir en la propagación de un pulso, en este caso tendrá una extensión limitada.

Llamaremos a las ondas mecánicas que se propagan en los fluidos sonidos, nuestra comunicación verbal es un sonido, también lo son las generadas por delfines o ballenas.

La zona que el hombre puede escuchar perfectamente sin ningún tipo de aditamento la llamamos zona audible y se extiende aproximadamente entre los 20 Hz y los 20khz. Las ondas por debajo de los 20 Hz las llamamos infrasonidos y las mayores que 20kHz ultrasonidos, sin hacer distinción del medio.

1

"La frase más excitante que se puede oír en ciencia,
la que anuncia nuevos descubrimientos,
no es "Eureka", sino ¡Eso es divertido!
Issac Asimov

Capítulo 1 - ONDAS EN 1D

1.1 Función de Onda Plana

Producimos una perturbación cualquiera en un punto y la representamos por φ (valor de la magnitud física perturbada), llamada función de onda, Fig.1.1

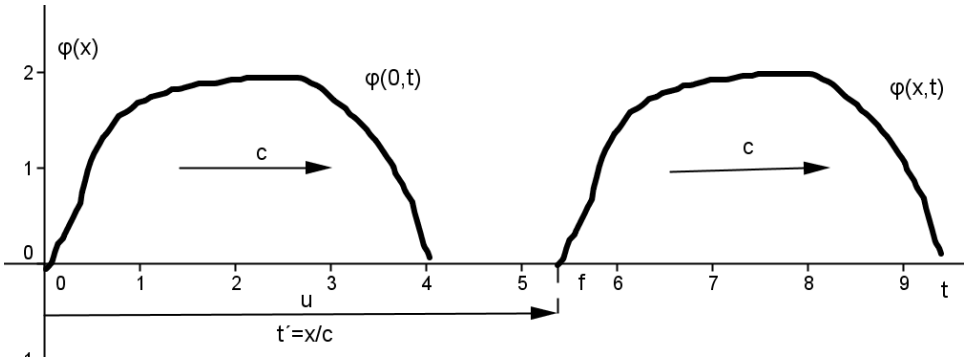


Fig1.1

Esta perturbación se propaga por el medio. Se reproducirá en todos los puntos del medio que sean alcanzados por la perturbación. Llamando t al tiempo y x a la distancia, debemos encontrar una función similar a $\varphi(0,t)$ que nos describa la perturbación en otro punto de la abscisa x Naturalmente, la perturbación empleará un cierto tiempo $t' = \frac{x}{c}$ en recorrer la distancia con una velocidad c, llamada velocidad de fase. Luego la función será

$$\varphi(x,t) = \varphi(t - t') = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Esta función nos da el mismo valor de c en el instante $t = t'$ que el que teníamos en el origen.

Es importante distinguir entre la velocidad de la onda (velocidad de fase) c y la velocidad v de la partícula del medio material cuando pasa la onda, que solo oscila al paso de la onda.

1.2 Ecuación diferencial de las ondas planas

La función de onda hallada es

$$\varphi(x,t) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Llamando $\theta = t - \frac{x}{c}$ al argumento de la función de onda o fase, quedando $\varphi(\theta)$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = 1$$

Luego calculamos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

Hallando la derivada segunda

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

Luego queda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, lineal y homogénea (ausencia de fuerzas exteriores). La ecuación de ondas es representativa de las llamadas ecuaciones diferenciales hiperbólicas, cuya solución es la función de onda. Representando también el movimiento ondulatorio unidimensional no amortiguado.
Se observa que la función de onda depende tanto de x como de t, luego en un instante dado $\varphi(x)$ nos da la forma de la perturbación, o sea la forma de la onda, (imagen fotográfica). Centrando nuestra atención en un dado punto del medio material, la función de onda nos da el cambio de la magnitud (amplitud, presión, etc.) en cuestión, en función del tiempo.

Si nos imaginamos sobre una onda, como haciendo surf sobre la misma, la fase o argumento debe ser constante

$$t - \frac{x}{c} = cte$$

Derivando respecto al tiempo

$$c = \frac{dx}{dt}$$

Donde se ve realmente que c es la velocidad de fase.

Si repasamos la forma en que se llegó a la ecuación de onda resulta claro que cualquier función de la forma $\varphi(x,t) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right)$ es solución de la ecuación de onda.

También son las funciones de onda las siguientes $\varphi(x \mp ct), \varphi(ct \mp x)$, según el caso se usará la más conveniente.

1.3 Condiciones iniciales y de frontera

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales tienen infinitas soluciones. Para obtener la solución de un problema concreto se debe añadir condiciones adicionales, estas pueden ser de dos tipos:

- ✓ Condiciones iniciales: dan el estado del objeto al inicio, en $t = 0$, como la ecuación de onda es de segundo orden en el tiempo se necesitan dos condiciones

  La condición iniciales en $t = 0 \rightarrow \begin{cases} \varphi(x,0) = \xi(x) \quad posición\ inicial \\ \left.\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad velocidad\ inicial \end{cases}$

  para $x \in \Omega$ y t $\in \mathcal{R}$, $con\ \xi(x)$, $\psi(x)$: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $\xi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$

- ✓ Condiciones de frontera: Determinan la interacción del cuerpo con el medio que lo rodea. Si estudiamos una cuerda infinita que vibra no tiene sentido las condiciones fronteras, si tiene sentido si estudiamos la vibración de la cuerda de un violín, hay dos tipos de condiciones,
  - I. Dirichlet: En este caso se dan los valores de la función de onda en la frontera.
  - II. Neumann: en este caso se dan los valores de la derivada en la dirección de la normal de la función de onda en la frontera.

Las condiciones de frontera e iniciales dirán cual es específicamente la solución a un problema concreto.

Hasta el momento se supuso que la velocidad de la onda es constante. Un modelo más realista de la ecuación de onda es suponer que la velocidad de propagación varíe con la frecuencia de la onda (dispersión). Otra modificación para sistemas más complejos es suponer que la velocidad depende de la amplitud de la onda esto nos conduce a una ecuación de onda no lineal.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2(\varphi)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Un caso particular se da cuando la velocidad de la onda cambia con la posición de la misma, por ejemplo; la propagación del sonido en el agua de mar, como veremos más adelante, esta cambia con la profundidad.

El medio o sustrato donde se propaga la onda pude estar moviéndose, caso del sonido en el aire o las pulsaciones del corazón en la sangre.

1.4 Algo más sobre la ecuación de onda

- Un sistema dinámico presenta simetría de reversibilidad temporal, cuando al observar un fenómeno no se puede distinguir si el sistema evoluciona

hacia el futuro o hacia el pasado. Dicho de otro modo las ecuaciones matemáticas que describen un proceso con simetría temporal son invariante frente al cambio de variable $t \to -t$ como fácilmente se puede verificar en la ecuación de onda (¿cómo?), por el contrario en la ecuación del calor no observamos el mismo comportamiento. Los procesos físicos a nivel microscópico presentan generalmente simetría temporal. Macroscópicamente hablando sucede lo contrario, tenemos una dirección clara hacia donde evoluciona el tiempo. La dirección del tiempo está siempre en todo fenómeno que presente asimetría temporal.

- En el mismo punto de un medio pueden existir simultáneamente varias ondas, esta propiedad de las ondas las distinguen claramente de los cuerpos materiales. Si existen simultáneamente en un punto dos o más ondas, la perturbación (elongación) que sufre el punto es la suma de las perturbaciones que tendría al estar afectada por cada una por separado.

  Este principio de adición vectorial de la elongación se llama superposición. El termino elongación tiene un significado muy amplio- ¿si la onda es trasversal como interpreta la elongación? - ¿en el caso de ondas sonoras como interpreta el termino elongación? - ¿y si son electromagnéticas?

  El principio de superposición es una consecuencia de la linealidad del sistema físico tratado o sea que el sistema en cuestión responda correctamente a las leyes lineales de la mecánica, tales como la ley de Hooke. Esto da origen a la linealidad de la ecuación diferencial de las ondas. Matemáticamente significa que los términos de la ecuación diferencial son de primer grado, (no aparece $\varphi^2, ni, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2$), luego esto es equivalente a decir que si φ_1 y φ_2 son soluciones de la ecuación diferencial, la combinación

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

  Es también solución de la ecuación diferencial.

  Si se pierde la linealidad de la ley de Hooke esto da origen a ecuaciones no lineales, donde no es aplicable el principio de superposición, sin embargo, es factible la existencia de ondas (no lineales) en el medio. En este caso

cada tren de onda puede afectar al otro en el mismo. En los últimos años han aparecido aplicaciones no-lineales en muchas áreas de la técnica.

El principio de superposición da origen a diversos fenómenos (interferencia, batido, ondas estacionarias).

En general la linealidad de un sistema concede ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo, en muchos casos, un cálculo sencillo, puesto que los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, resolverlos resulta más difícil y en algunos casos imposibles. El comportamiento de una variable dada es extremadamente difícil de predecir, en muchos casos el comportamiento es caótico.

La linealidad nos permite hacer un razonamiento inverso y suponer que una función de onda determinada está constituida por dos o más funciones, como veremos en más de un caso.

1.5 Otra deducción de la ecuación de onda

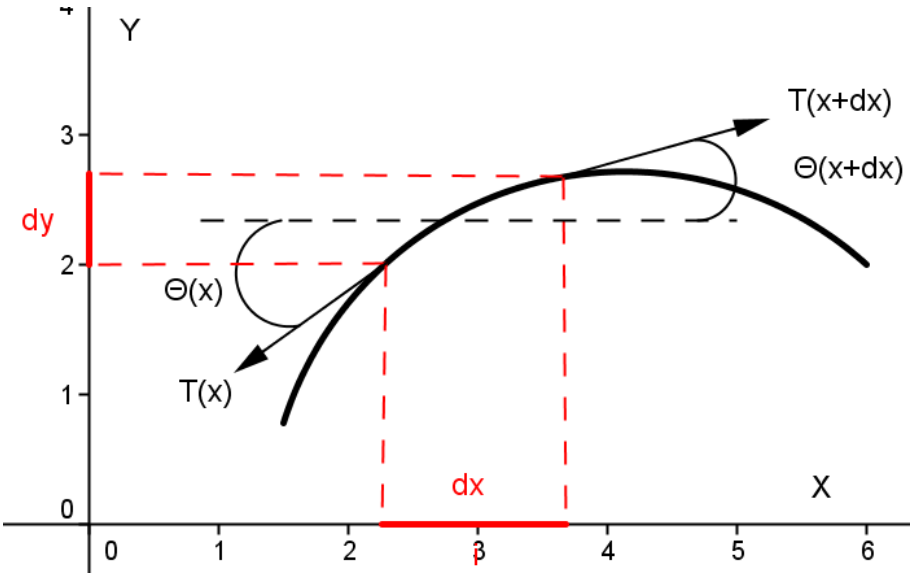


Fig. 1.2

Consideremos una cuerda larga Fig.1.2 y homogénea de densidad lineal $\rho = \frac{dm}{dx}$, en cada uno de los extremos de un elemento diferencial de la cuerda actúan la

tensión T como vemos en la figura. La componente transversal de la tensión total es

$$dT_y = T\left(sen\theta_{x+dx} - sen\theta_x\right)$$

Como las deformaciones son chicas las tensiones son iguales y los ángulos pequeños, luego se puede remplazar el seno por la tangente del ángulo.

$$dT_y = T\left(tg\theta_{x+dx} - tg\theta_x\right)$$

Y como la tg es igual a $\frac{dy}{dx}$ se puede remplazar, luego queda

$$dT_y = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Esta fuerza debe ser igual a la masa por la aceleración

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Luego la velocidad es:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

La velocidad no depende de la forma de la perturbación, solo de T, propiedad elástica y de la densidad, propiedad inercial del medio.

Mediante un análisis similar al anterior se llega a ecuaciones de onda con velocidades dependiente de cada caso, veamos los siguientes ejemplos:

1.6 Ondas transversales en una varilla

El análisis nos conduce a la expresión de la velocidad de las ondas transversales en una varilla

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Donde G es el módulo de rigidez y ρ la densidad

1.7 Ondas de torsión en una varilla

Las ondas de torsión son un tipo particular de ondas transversales, por lo tanto, tienen la misma velocidad que las transversales, con independencia de la forma.

1.8 Ondas longitudinales en varillas

La propagación de ondas longitudinales en los sólidos da lugar a alargamientos y acortamientos del material luego la velocidad de propagación de esta onda será función del módulo de Young (E), veremos que las ondas longitudinales son más rápidas que las transversales, más adelante se llegara al mismo resultado.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Comparando la velocidad transversal con la longitudinal

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{y} \quad c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Como

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} < E \quad \text{ya que} \quad \mu > 0$$

Donde μ es el coeficiente de Poisson

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{2(1+\mu)} > 1$$

Luego $c_l > c_t$ para el caso del cobre $\mu = 0{,}36$ entonces $c_l = 1{,}63\, c_t$

Una aplicación a la sísmica: conociendo las velocidades de propagación de las ondas transversales y longitudinales en la tierra, se puede hallar la posición de la fuente emisora. ¿Cómo?

En general se puede escribir:

Ondas transversales en una cuerda	$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$	Tensión=T Densidad lineal= ρ
Ondas longitudinales en una barra Sólida	$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Módulo de Young= E Densidad = ρ
Ondas transversales en una barra Sólida	$c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	Módulo de rigidez= G Densidad = ρ
Ondas de torsión en una barra	$c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	Módulo de rigidez= G Densidad = ρ
Ondas longitudinales en un resorte	$c=L\sqrt{\frac{K}{m}}$	Constante elástica = K Longitud del resorte=L Masa=m
Ondas longitudinales en un fluido	$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$	Módulo de compresión= K Densidad = ρ

1.9 Caso de la ecuación de onda no lineal

Si las deformaciones no son pequeñas no podemos usar que $sen\theta \approx tg\theta$
Luego tomemos la expresión siguiente

$$sen\theta=\frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=tg\theta\left(1+tg^2\theta\right)^{-1/2}\approx tg\theta\left(1-\frac{1}{2}tg^2\theta\right)=tg\theta-\frac{1}{2}tg^3\theta$$

Desarrollando la raíz. Vemos que tenemos un término más que en el caso anterior. Si el ángulo es pequeño $\frac{1}{2}tg^3\theta$ es despreciable y recuperamos la suposición anterior. Luego

$$T\left[tg\theta_{x+dx}-\frac{1}{2}tg^3\theta_{x+dx}-tg\theta_x+\frac{1}{2}tg^3\theta_x\right]=T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3_x\right]=$$

$$=T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3_x\right)\right]=T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3dx\right]=$$

$$=T\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]dx=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

Igualando a masa por aceleración queda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$$

Obsérvese que esta ecuación no es lineal y se reduce a la anterior cuando $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ es despreciable y la velocidad de propagación es la misma de antes.

¿La solución de la ecuación de onda lineal es solución de esta ecuación también?

1.10 Obtención de la ecuación de la onda por análisis dimensional

Deduzcamos la velocidad de propagación de una onda por análisis dimensional. Para tal fin supondremos que la velocidad de propagación depende de la densidad del medio ρ, de su módulo de Young E y de la frecuencia ν. Luego tendremos:

$$c=f(E,\rho,\nu) \text{ o sea } \quad c=KE^\alpha\rho^\beta\nu^\gamma$$

Dimensionalmente puede escribirse como:

$$LT^{-1}=\left(ML^{-1}T^{-2}\right)^\alpha\left(ML^{-3}\right)^\beta\left(T^{-1}\right)^\gamma=M^{\alpha+\beta}L^{-\alpha-3\beta}T^{-2\alpha-\gamma}$$

Para que se cumpla la identidad debe ser

$$0=\alpha+\beta\ ;\ 1=-\alpha-3\beta\ ;\ -1=-2\alpha-\gamma$$

Resolviendo queda

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2} \ , \ \gamma = 0$$

Luego

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

1.11 Solución general de la ecuación de onda unidireccional

La solución más general puede ser hallada por un método debido a D´Alembert[1] hallado en 1747, cuando trataba de demostrar "que existe una infinidad de curvas distintas" entre las posibles formas de la cuerda vibrante. Para ello hacemos el cambio de variable siguiente $u = x - ct$ y $v = x + ct$, luego

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = -c\frac{\partial \varphi}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

La derivada segunda será

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left(-c\frac{\partial \varphi}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)$$

De manera similar se llega a obtener la derivada espacial, quedando:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

Igualando términos y simplificando se llega

[1] *El problema de la cuerda vibrante comienza con Brook Taylor en (1715), posteriormente participan, (1727) Johann Bernoulli, D'Alembert, Euler en (1748), solucionándolo Fourier (1822). Un resumen del desarrollo histórico puede verse en, Miguel de Guzmán, Impactos del Análisis Armónico, Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Madrid, 23 Marzo 1983).*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0$$

La solución es

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial v} = h(v)$$

Integrando

$$\varphi(u,v) = \int h(v)dv + f(u) = g(v) + f(u)$$

Luego D´Alembert encontró que la solución general a la ecuación de onda unidireccional tiene la forma

$$\varphi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Donde f y g son funciones arbitrarias que representan ondas que se mueven en direcciones opuestos.

- La función de onda *f* representa una onda que se propaga en la dirección positiva del eje *x*
- La función de onda *g* representa una onda que se mueve en sentido negativo del eje *x*

Suponiendo condiciones iniciales se puede encontrar la solución.

Si

$$\varphi(x,0) = \xi(x)$$
$$\left.\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\varphi(x,0) = f(x) + g(x) = \xi(x)$$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial f(x-ct)}{\partial (x-ct)} + c\frac{\partial g(x-ct)}{\partial (x-ct)}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = -c\frac{\partial f(x)}{\partial x} + c\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \psi(x)$$

Integrando respecto a x

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(x)dx$$

Y como

$$f(x) + g(x) = \xi(x)$$

Sumando y restando queda

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\xi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(x)dx\right] \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{2}\left[\xi(x) - \frac{1}{c}\int_0^x \psi(x)dx\right]$$

$$\varphi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \frac{\xi(x-ct) + \xi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x)dx$$

Que es la solución general para el problema de valores iniciales planteado.
Esta solución puede ser escrita de la siguiente manera

$$\varphi(x,t) = \frac{\xi(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(x)dx + \frac{\xi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(x)dx$$

Se interpreta como dos ondas, con la mitad de amplitud, formadas por las condiciones iniciales viajando en sentido contrario, “la información contenida en los datos iniciales viaja por los argumentos”.
Veamos algunas particularidades de esta solución. Encontremos la solución en un punto (x_0, t_0)

$$\varphi(x_0,t_0) = \frac{\xi(x_0 - ct_0) + \xi(x_0 + ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+t_0} \psi(x)\,dx$$

En ella vemos que depende solo de los valores que toma ξ en los puntos $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$ y de los valores de ψ en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$, luego la solución

$\varphi(x_0, t_0)$ depende solo de los valores iniciales contenidos en el intervalo cerrado $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ que se lo llama dominio de dependencia de la solución (x_0, t_0) de los valores iniciales. Esta es una de las propiedades fundamentales de la ecuación de onda, su limitado dominio de dependencia. Queda claro que la solución en (x_0, t_0) nunca podrá ser influenciada por valores fuera del dominio $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ .En la Fig. 1.3 se observa lo dicho.

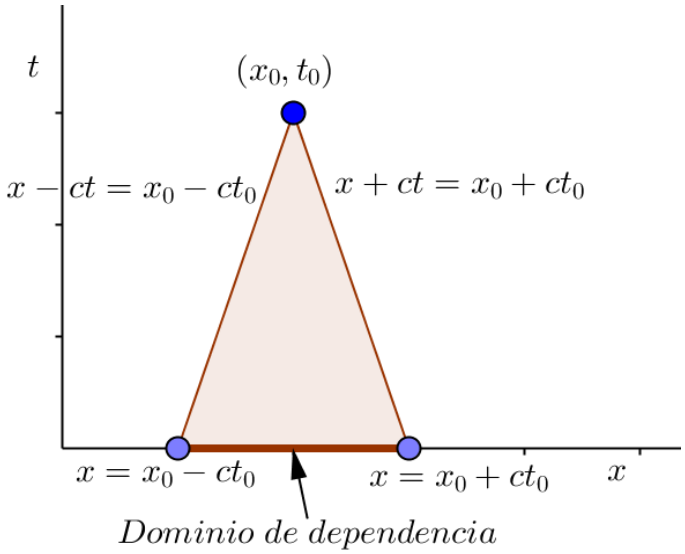


Fig. 1.3.

Por otro lado si $x = x_0$, el valor de ξ inicial influye solo en los valores de la solución sobre las dos rectas de las fases que pasan por el punto $(x_0, 0)$.dominio de influencia Igualmente en el caso de ψ e x_0, la zona de influencia es el triángulo infinito con vértice en x_0 y limitado por las fases, como se observa en la Fig. 1.4

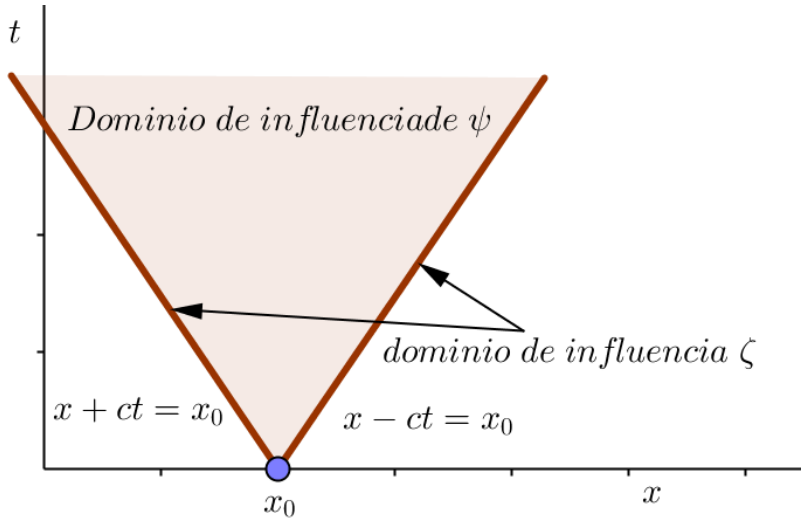


Fig. 1.4

Veamos un ejemplo con el objeto de interpretar físicamente el fenómeno. La solución escrita de la siguiente manera, como ya fue dicho, se interpreta como una onda que se nueve hacia las equis negativas y otra hacia las positivas, ambas con igual velocidad c

$$\varphi(x,t) = \frac{\xi(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(x)dx + \frac{\xi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(x)dx$$

Supongamos una onda triangular en $t = 0$ cuyo soporte es $[-2,2]$ y amplitud 2, al comenzar el movimiento se divide en dos de amplitud mitad que viajan en sentido contrario. Si $\psi(x) = 0$ la onda solo depende de los puntos $x \mp ct$, vemos también que las ondas no modifican su forma, solo al comienzo hay una superposición, como se observa en la Fig. 1.5.

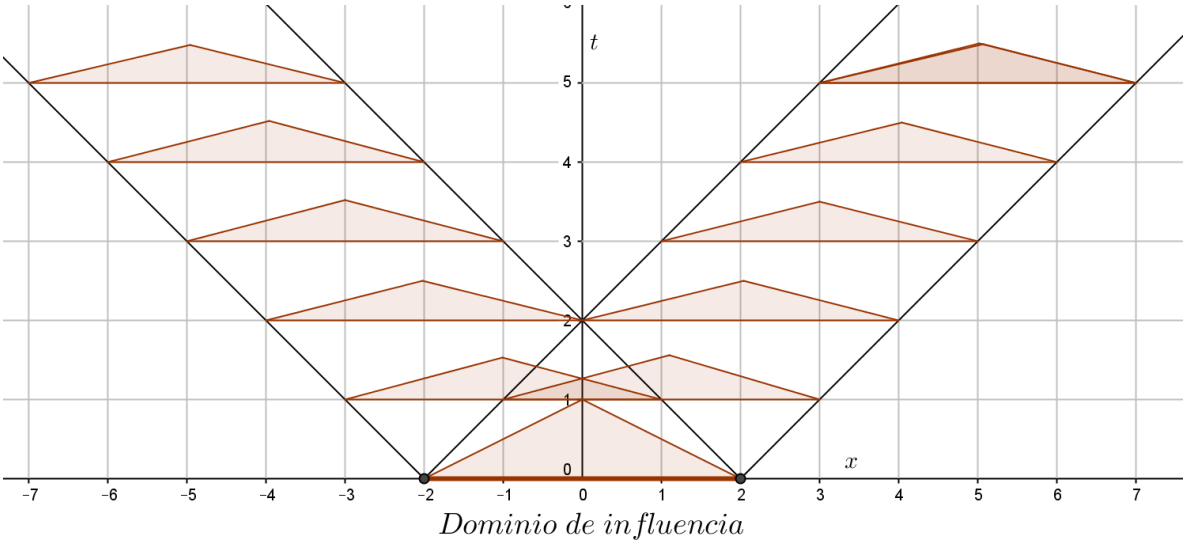


Fig. 1.5

Veamos un ejemplo numérico.

Una cuerda de longitud ilimitada se la obliga a tomar una forma armónica

$\varphi(x,0) = a\cos(kx)$, $\forall\, x \in \mathcal{R}$, y se la suelta en el instante $t = 0,$. Encontrar la función de onda general. Como

$\varphi(x,0) = a\cos(kx)$ con Velocidad inicial $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, recordando que

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\xi(x-ct) + \xi(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x)\,dx\right]$$

$$\varphi(x,0) = \frac{1}{2}\left[2\xi(x) + \frac{1}{c}\int_{x}^{x} \psi(x)\,dx\right] = a\cos(kx)$$

$\xi(x) = a\cos(kx)$ Luego

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left[a\cos(k(x-ct)) + a\cos(k(x+ct)) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x)\,dx\right]$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left[2a\cos(kx)\cos(kct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x)\,dx\right]$$

Teniendo en cuenta la regla de Leibniz

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} F(x,\alpha)dx = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha}dx + F(\varphi_2,\alpha)\frac{d\varphi_2}{d\alpha} - F(\varphi_1,\alpha)\frac{d\varphi_1}{d\alpha}$$

Llamando α a t , $F = \psi(x)$ y $\varphi_2(\alpha) = x + ct$ y $\varphi_1(\alpha) = x - ct$ queda

$\psi(x+ct)c - \psi(x-ct)(-c) = c\psi(x+ct) + c\psi(x-ct)$ Luego

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\left[2a\cos(kx)(-kc\sin(kct)) + \frac{1}{c}\big(c\psi(x+ct) + c\psi(x-ct)\big)\right]$$

$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\big(c\psi(x) + c\psi(x)\big)\right] = 0 \Longrightarrow \psi(x) = 0$ Por lo tanto, la solución es

$$\varphi(x,t) = [a\cos(kx)\cos(kct)]$$

En este caso particular también se lo podría haber resuelto de la siguiente manera, recordando que

$$\varphi(x,0) = \xi(x) = a\cos(kx)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = 0$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\xi(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\psi(x)dx + \frac{\xi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(x)dx$$

$$\varphi(x,t) = \frac{\xi(x-ct)}{2} + \frac{\xi(x+ct)}{2} = \frac{1}{2}a\cos k(x-ct) + \frac{1}{2}a\cos k(x+ct)$$

¿Da igual a la expresión hallada anteriormente?

Se observa que son dos ondas que se propagan en distintas direcciones y dependen solo del valor inicial.

1.12 Condiciones de contorno

Cuando una onda llega a una superficie que separa dos medios con características mecánicas diferentes, al menos uno de estos parámetros ρ, μ, λ distintos. Se puede hallar la relación entre ambas ondas a partir de la condición de contorno. Dicho de otro modo, las relaciones que deben cumplir cuando pasan de un medio otro, los esfuerzos y deformaciones.

De un lado y del otro de la superficie las tensiones sobre la superficie y las deformaciones deben ser continuas.

Veamos un razonamiento simple que muestra la necesidad de la continuidad de algunas componentes. Supongamos un pequeño cilindro de ambos lados de la superficie de separación, cuya altura es $2d$. En el límite cuando $d \to 0$ solo las fuerzas superficiales superior e inferior actúan El cuerpo debe estar en equilibrio, por tanto, la suma de todas las fuerzas (de volumen y de superficie) que actúa sobre el cilindro debe ser cero Fig. 1.6

$$\sigma_a\Delta - \sigma_b\Delta = 0$$

$$\sigma_a = \sigma_b$$

AREA

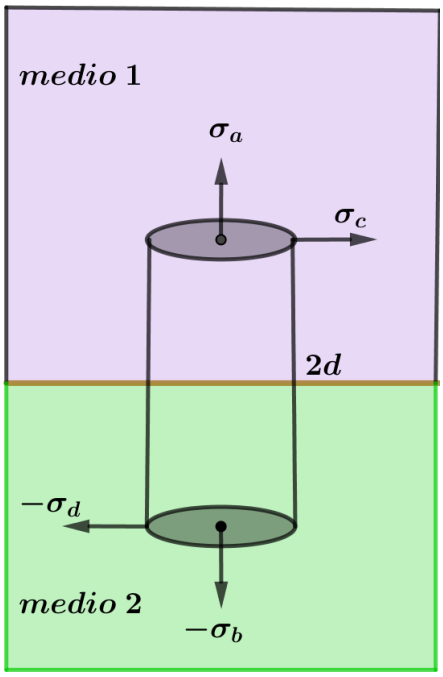


Fig. 1.6

Un razonamiento similar se puede hacer con la componente tangencial, luego

Las componentes de la tensión normal y tangencial a la superficie deben ser continuas

Las componentes normal y tangencial del desplazamiento también deben ser continuas. Si el desplazamiento normal no fuera continuo el medio se separaría uno del otro. Si el desplazamiento tangencial no fuese continuo, los dos medios se moverían de modo diferente. Se supone que este movimiento es imposible en el sólido.

Cuando uno o ambos medios se reemplazan por un fluido o vacío las condiciones de contorno se reducen en número. El esquema Fig. 1.7 muestra las componentes que se conserva al cambiar de medio solido-solido, suponiendo la superficie de separación entre los dos medios en $z = 0$

Si los dos medios son sólidos:

$u_x, u_y, u_z, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ son continuas

Si un medio es sólido y el otro fluido

u_z, σ_{zz} son continuas $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$

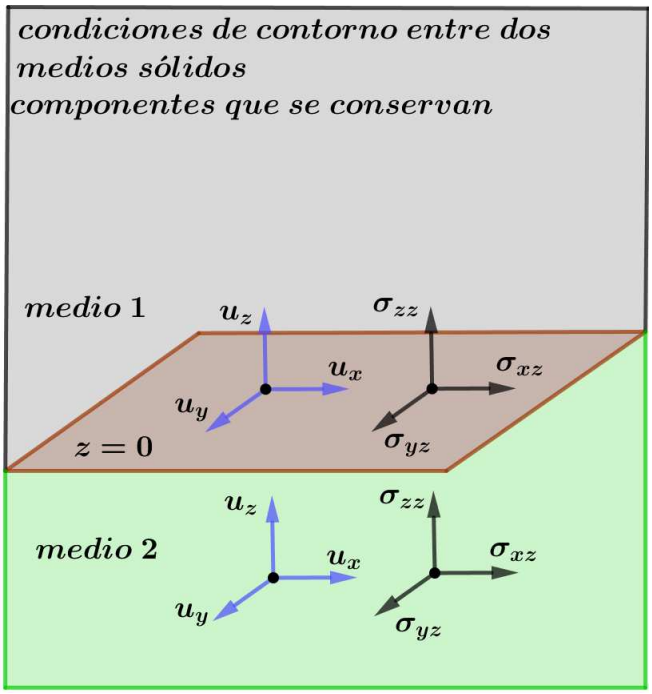


Fig. 1.7

Extremo fijo: Veamos que sucede cuando la onda, que se propaga, llega a un extremo rígido, (cuerda con un extremo fijo). Teniendo en cuenta la solución general de la ecuación de onda y suponiendo el extremo fijo en $x = 0$

$$\varphi(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

$$\varphi(0,t) = 0 = f(0,t) + g(0,t) \Longrightarrow f(t) = -g(t)$$

$-g(t)$ Representa una onda de amplitud negativa e igual $f(t)$, luego remplazando.

$$\varphi(x,t) = f(ct - x) - f(ct + x)$$

Vemos que la onda al llegar al extremo rígido se refleja, retornando otra igual de amplitud negativa y propagándose en sentido contrario

Se puede ver que en $x = 0$ la función de onda es cero para todo t.

Extremo móvil: Supongamos ahora que el extremo $(x = 0)$, al cual llega es libre (cuerda con el extremo libre), en este caso no puede ser cero $\varphi(x,t)$ en $x = 0$, luego lo que debe ser cero es $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

$$\varphi(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = f'(ct) - g'(ct) = 0$$

$$f'(ct) = g'(ct)$$

Integrando

$$f(ct) = g(ct)$$

Luego el pulso se desplaza en sentido contrario, pero sigue siendo positivo

$$\varphi(x,t) = f(ct-x) + f(ct+x)$$

Se ve que en $x = 0$ la amplitud es doble.

$$\varphi(0,t) = 2f(ct)$$

1.13 Ondas Armónicas

Se llama ondas armónicas a aquellas que tienen perturbación tipo seno o coseno

$$\varphi(x,t) = A sen(\omega t - kx)$$

k, es conocido como número de onda ([k]=m^{-1}) y $\omega = 2\pi\nu$ como **frecuencia temporal** (angular o pulsación) ([ω]=s^{-1}) mientras que $T = \frac{1}{\nu}$,($[T] = s$) periodo.

La constante k tiene un significado especial, se observa que si remplazamos x por $x + \frac{2\pi}{k}$

$$\varphi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = A sen\left(\omega t - k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)\right) = A sen(\omega t - kx)$$

Entonces $\frac{2\pi}{k} = \lambda$ es el periodo espacial, la curva se repite cada λ, luego $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de longitudes de onda que hay en 2π , también llamada **frecuencia espacial**. Veamos otra periodicidad, si remplazamos t por $t+T$

$$\varphi(x; t+T) = A sen(\omega(t+T) - kx) = A sen(\omega t + \omega T - kx)$$

Si $\omega T = 2\pi$ o sea $\omega = 2\pi\nu$ la función vuelve a valer $\varphi(x;t)$. Luego T es el periodo temporal. El movimiento presenta doble periodicidad; en el tiempo y en el espacio.

El argumento, $\omega t \mp kx$ de la función de onda se la llama fase y lo podemos representar por ξ , luego vemos que la fase es función de $\xi = \xi(x,t)$, x y t. Pudiendo tener una fase inicial llamada ξ_0, por tanto, podemos definir la rapidez del cambio de fase con el tiempo y con la distancia

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_t = \mp k \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|_x = \omega$$

Supongamos que el valor de la fase ξ permanece constante, pudiendo variar t y x , esto indica que nos ubicamos en el frente de onda y nos movemos con el, luego podemos calcular la velocidad de la fase

$$\xi = \omega t - kx + \xi_0 = cte$$
$$d\xi = \omega dt - k dx = 0$$
$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Es claro que solo podemos hablar de velocidad de fase si la onda tiene la misma forma a lo largo de toda su longitud. Por el contrario, si cambia al propagarse la velocidad de fase no daría el mismo resultado. Si ω es función de k decimos que la onda es dispersiva. La relación entre la frecuencia de oscilación temporal ω la frecuencia de oscilación espacial k se llama relación de dispersión.

1.14 Para recordar

Recordemos la equivalencia espacial y temporal entre k y ω

$$\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}}$$
$$\boldsymbol{k\lambda = 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi}$$

¿Es posible definir una frecuencia espacial semejante a la temporal?

1.15 Notación compleja

Consiste en representar la función de onda armónica como la parte real o imaginaria, según sea conveniente, de un número complejo. En muchos casos esta representación facilita los cálculos.

Si la función de onda es $\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t - kx)}$ entonces

$$\varphi = \varphi_0(cos(\omega t - kx) + i\, sin(\omega t - kx))$$

Si admitimos una fase inicial para la función de onda, es decir

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

O sea

$\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t - kx + \alpha)} = A e^{i(\omega t - kx)}$ con A complejo e igual $\varphi_0 e^{\mp i\alpha}$, vemos que en algunos casos la amplitud de la onda puede ser compleja. Veamos algunas ventajas de esta notación

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = i\omega\varphi_0 e^{i(\omega t - kx)} = i\omega\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = -ik\varphi_0 e^{i(\omega t - kx)} = -ik\varphi$$

1.16 Superposición de ondas

Como ya fue comentado, la linealidad de la ecuación de onda genera el principio de superposición, en donde dos soluciones distintas de la ecuación de onda componen una tercera solución que es la suma de las dos primeras. La superposición de ondas da origen a un gran número de fenómenos.

Veamos distintos casos:

1. Consideremos dos ondas que viajan en la misma dirección y que solo difieren en la fase inicial o sé que tienen igual frecuencia, amplitud (asumimos que A es real) y velocidad

$$\varphi_1 = A e^{i(kx - \omega t + \alpha_1)} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = A e^{i(kx - \omega t + \alpha_2)}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = Ae^{i\alpha_1}e^{i(kx-\omega t)} + Ae^{i\alpha_2}e^{i(kx-\omega t)} = \left(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}\right)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Llamando

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \text{ con } \alpha_1 > \alpha_2 \text{ y } \alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

Sustituyendo en las expresiones los nuevos parámetros queda

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A\left[e^{i\left(\frac{\Delta\alpha+2\alpha}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\Delta\alpha-2\alpha}{2}\right)}\right]e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$Ae^{i\alpha}\left[e^{i\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}\right]e^{i(kx-\omega t)} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)e^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$

Vemos que la suma de dos armónicas también es armónica con la misma frecuencia y velocidad de propagación mientras que la amplitud depende del desfasaje relativo. De la expresión hallada se infieren algunos casos extremos:

- Si el desfasaje entre ambas ondas es despreciable o sea $\Delta\alpha \approx 0 \implies \cos\frac{\Delta\alpha}{2} \approx 1$ y la amplitud seria $2A$, estamos en presencia de una interferencia constructiva.
- Si el desfasaje es próximo a π, la amplitud será cercana a cero, luego las dos ondas se anulan.

2. Cuando las amplitudes y las fases son distintas es conveniente utilizar el método de los fasores. Las ondas a sumar son las siguientes:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A_1e^{i(kx-\omega t+\alpha_1)} + A_2e^{i(kx-\omega t+\alpha_2)} =$$

$$\left(A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2}\right)e^{i(kx-\omega t)}$$

La amplitud de la suma es un nuevo número complejo que llamamos

$$Ae^{i\alpha} = A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2}$$

El módulo del mismo será

$$|A|^2 = AA^* = \left(A_1e^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2}\right)\left(A_1e^{-i\alpha_1} + A_2e^{-i\alpha_2}\right) =$$

$$A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)}\right) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

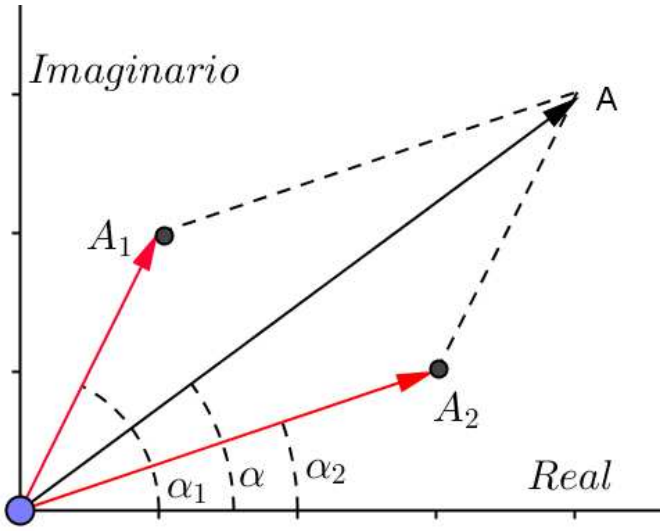


Fig. 1.8

Del esquema anterior Fig. 1.8 se comprende fácilmente que α se halla con la expresión siguiente

$$\tan(\alpha) = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_2 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$$

Luego

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_2 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\right)$$

por tanto

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}\, e^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$

Nuevamente obtenemos una onda armónica. Estas expresiones fácilmente pueden ser generalizadas a una composición de más de dos ondas.

Al producto

$$2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Se lo denomina término de interferencia y es decisivo en la composición de ondas armónicas ya que de alguna manera comanda el resultado final.

Se comprobó que la suma de ondas armónicas con igual frecuencia y velocidad de fase, pero con amplitud y fase arbitraria es también armónica. Esto no siempre es así, si no tienen la frecuencia la onda resultante no es armónica.

En distintas ocasiones es conveniente encarar la suma de las funciones de onda adosando la parte espacial a la fase inicial alfa, de la manera siguiente

$$\varphi_1 = A_1 e^{i(kx-\omega t+\alpha_1)} = A_1 e^{i[\omega t-(kx+\alpha_1)]}$$

Las expresiones anteriores no cambian teniendo en cuenta que ahora alfa incluye el término kx. Con esta simple modificación se observa que el desfasaje puede también deberse a una diferencia en el camino recorrido, luego

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \left(kx_1 - \alpha_1^{\circ}\right) - \left(kx_2 - \alpha_2^{\circ}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) + \left(\alpha_1^{\circ} - \alpha_2^{\circ}\right)$$

Donde ahora llamamos α_1° y α_2° a las fases iniciales y $x_1 - x_2$ es la diferencia de camino recorrido desde las fuentes al punto de interferencia o desde una misma fuente que llegan al punto de interferencia por caminos distintos. Si $\alpha_1^{\circ} - \alpha_2^{\circ}$ es constante se llaman ondas coherentes.

Una práctica de laboratorio que ejemplifica estos desarrollos y simple de realizar con un estetoscopio es el tubo de Quincke. Los fenómenos de interferencia son relativamente simples de observar en acústica, existen Apple que facilitan su observación.

Ejercicio

Partiendo de las ecuaciones fasoriales encuentre la expresión

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)e^{i(kx-\omega t+\alpha)}$$

Hallada para la suma de dos armónicas que solo difieren en la amplitud. Como

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Y teniendo en cuenta que $A_1 = A_2$

$$A = \sqrt{2A^2 + 2A^2\cos\Delta\alpha} = \sqrt{2A^2(1+\cos\Delta\alpha)} = 2A\sqrt{\frac{1+\cos\Delta\alpha}{2}} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

Como

$$\tan(\alpha) = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_2\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} =$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$$

Luego

$$\alpha=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

Ejercicio

Sume dos ondas armónicas que viajan en sentido contrario con igual frecuencia y amplitud opuesta

$$\varphi_1=A_1e^{i[\omega t-(kx+\alpha_1)]}\quad \varphi_2=-A_1e^{i[\omega t+(kx+\alpha_2)]}$$

Suponiendo desfasaje inicial cero

$$\varphi_1+\varphi_2=A_1e^{i[\omega t-(kx)]}+A_2e^{i[\omega t-(-kx)]}$$

Luego

$$A^{\wedge}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(kx-(-kx))}=\sqrt{2A^2(1-\cos(2kx))}=$$

$$2A\sqrt{\frac{1-\cos(2kx)}{2}}=2A\sin(kx)$$

Por tanto

$$A^{\wedge}=2A\sin(kx)$$

$$\tan(\alpha)=\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_2\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}=\frac{\sin(kx)-\sin(-kx)}{\cos(kx)-\cos(-kx)}=\frac{\sin(kx)+\sin(kx)}{\cos(kx)-\cos(kx)}$$

$$\frac{2\sin\left(\frac{2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{0}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{0}{2}\right)}=\tan(kx)\Longrightarrow\alpha=kx$$

Reemplazando

$$\varphi_1+\varphi_2=2A\sin(kx)\,e^{i(\omega t-kx+\alpha)}=2A\sin(kx)\,e^{i(\omega t)}$$

Por primera vez nos encontramos con una solución de la ecuación de onda donde el término espacial se encuentra desacoplado del temporal, estas son soluciones estacionarias oscilan y no progresan como las ondas. Cada punto oscila con una frecuencia ω.

1.17 Suma de ondas de distinta frecuencia (Batido)

Consideremos ahora la superposición dos ondas que tienen la misma amplitud, fase inicial cero y distinta frecuencia y numero de onda, propagándose en el mismo sentido

$$\varphi_1 + \varphi_2 = Ae^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + Ae^{i(k_2 x - \omega_2 t)}$$

Recordando que la suma de dos exponenciales distintas se las puede escribir de la siguiente manera, fácilmente demostrable.

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right]$$

Llamando $\alpha = k_1 x - \omega_1 t$ y $\beta = k_2 x - \omega_2 t$, reemplazando en la expresión precedente

$$\varphi_1 + \varphi_2 = Ae^{i\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]}\left[e^{i\left[\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]} + e^{-i\left[\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]}\right] =$$

$$2A\cos\left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] e^{i\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]}$$

Llamando

$\frac{k_1+k_2}{2} = \bar{k}$ valor medio de k y $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \bar{\omega}$ valor medio de ω

Y reemplazando a

$$\check{k} = \frac{k_1-k_2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \check{\omega}$$

Se llega a la siguiente expresión, tomando la parte real

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2A\cos\left[\check{k}x - \check{\omega}\,t\right]\cos\left[\bar{k}x - \bar{\omega}t\right]$$

Luego la resultante de la suma puede ser interpretada como una onda que se propaga a frecuencia $\bar{\omega}$ (portadora) y que tiene una amplitud variable en el tiempo o modulada por

$$2A\cos\left[\check{k}x - \check{\omega}\,t\right]$$

Observemos que esta deducción es válida para cualquier valor de frecuencia y número de onda, pero su aplicación como batido o pulsación tiene solo sentido cuando son comparables ω_1 y ω_2 entonces $\bar{\omega} \gg \check{\omega}$, esto implica que la onda

modulante cambia lentamente comparada con la portadora. Este fenómeno da origen al concepto de paquete de onda que comentaremos más adelante. También presente en innumerables aplicaciones concretas en distintos tipos de ondas por ejemplo para la determinación de la velocidad de propagación de objetos móviles (con ondas electromagnéticas), comparación de frecuencias en sistemas rotantes, para la afinación de instrumentos de cuerda, haciendo vibrar al mismo tiempo un diapasón (de frecuencia conocida) que la cuerda a afinar, tensando la cuerda hasta que desaparezca el batido. Seda naturalmente cuando se hace vibrar un cuenco tibetano. etc.

1.18 El sonido en el agua de mar

Sé ha determinado experimentalmente que la velocidad del sonido en el agua aumenta con la temperatura hasta llegar a 73ºc. Por encima de este punto disminuye con la elevación de la temperatura. En el caso del agua de mar debe tenerse en cuenta la influencia de dos factores adicionales, que son: la salinidad y los cambios de la presión, asociados a la profundidad. La siguiente es una de las ecuaciones empíricas:

$$c = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055\,T^2 + 0{,}00029T^3 + (1{,}34 - 0{,}01T)(S - 35) + 0{,}02D$$

La velocidad esta expresada en $^m/_S$, la temperatura T en ℃ entre 0 y 35℃, donde S es la salinidad entre 0 y 45 partes por mil y por último D es la profundidad en m. Luego la velocidad del sonido en la superficie del mar, considerando un 35 por 1000 de salinidad es de $1449\,^m/_S$ a 0℃ Esta expresión es llamada; Del Grosso presentada en 1960 y luego perfeccionada por Mackenzie en 1981. Como consecuencia de la variación de la velocidad en el plano vertical, podemos decir que el mar se halla estratificado en zonas, en cada una de las cuales las ondas sonoras tendrán distinto comportamiento. Algo similar se da también en la corteza terrestre. En todos los mares se da el mismo fenómeno por lo cual la velocidad se encuentra dividida en tres:

Horizontalmente no existen variaciones de presión. Los cambios de salinidad suelen ser pequeños y los de temperatura mínimos comparados con los cambios verticales. En el esquema siguiente Fig. 1.8 se observa la variación de la velocidad de las ondas elásticas en el agua de mar con la profundidad Una vez que se obtiene la velocidad del sonido en función de la temperatura, la presión y la salinidad, se puede estudiar cómo varía esta velocidad respecto a la profundidad y obtener el perfil:

1. Justo debajo de la superficie del mar está la ***capa superficial***, en la que la velocidad del sonido está sujeta a variaciones diarias y locales de calentamiento, enfriamiento y a la acción del viento y de las olas.
2. Debajo de la capa superficial reside la **termoclina estacional**, caracterizada por un gradiente térmico negativo o un gradiente de velocidad (la temperatura y la velocidad disminuyen con la profundidad) que varía con las estaciones.
3. Por debajo de la termoclina estacional está la ***termoclina principal*** que sólo es ligeramente afectada por cambios estacionales.
4. Debajo de la termoclina principal y extendiéndose hasta el fondo del mar está la *capa* ***isoterma profunda*** que tiene una temperatura aproximadamente constante de cerca de 4 ºC , en la que la velocidad del sonido se incrementa con la profundidad a causa de la creciente presión

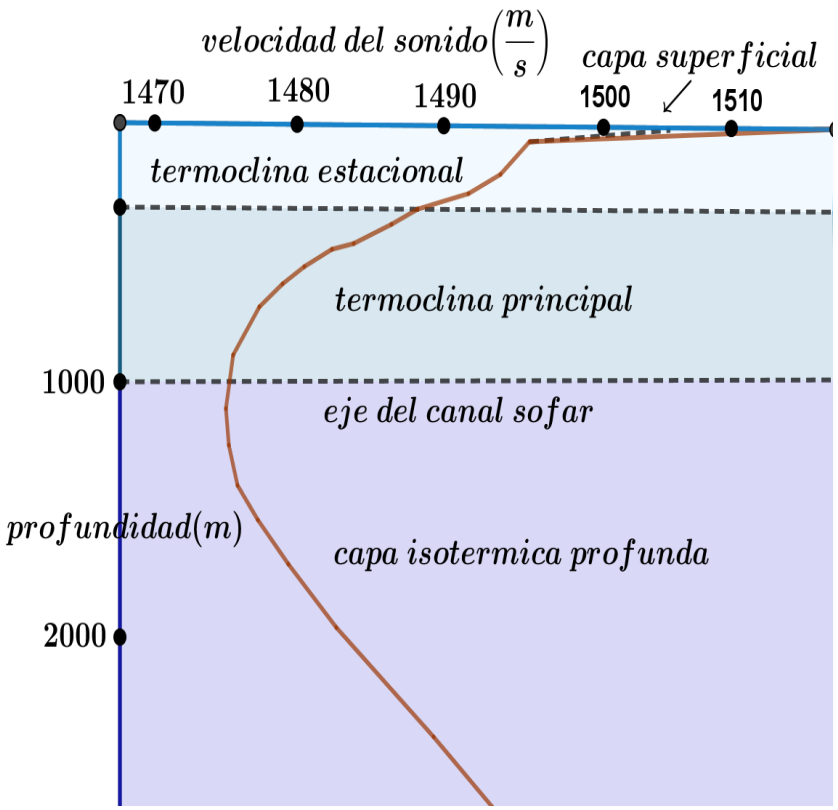


Fig. 1.8

1.19 Propagación de información por medio de ondas elásticas

Este tema no tiene nada de original desde el comienzo de la vida hombres y animales nos comunicamos por medio de las ondas elásticas que se propagan en el aire, también lo hacer ciertas especies animales utilizando como medio el agua, o bien la tierra, la pregunta es; ¿podríamos comunicarnos a través de largas distancias con ondas elásticas?, algo similar a lo que se hace con las ondas electromagnéticas. Desde hace unos años grupos de investigación trabajan en comunicación subacuática. Si el medio de propagación es el agua, parecería razonable que las ondas adecuadas para usarlas como portadora deberían ser las acústicas. Si bien las ondas electromagnéticas tienen propiedades inigualables hasta ahora, en el agua se atenúan en pocos metros. El amplio conocimiento desarrollado en la propagación de ondas electromagnéticas es en general aplicable a la comunicación subacuática. Sin embargo, esta aplicación no es inmediata ya que la propagación acústica en el agua difiere en características fundamentales. Mencionaremos solo algunas de las diferencias, dificultades y virtudes:

1. La velocidad típica de propagación de las ondas elástica en las aguas es de $1500\ {}^{m}/_{S}$, si pensamos en una onda de frecuencia media de $50\ kHz$ tendrá una longitud de onda de $30\ mm$ que para una onda electromagnética se da para una frecuencia de 10 GHz. En este caso se presentan los mismos inconvenientes que tienen las ondas electromagnéticas, de esa frecuencia, respecto a la presencia de obstáculos comparables a la longitud de onda.
2. La calidad de la señal que se transmite depende de las características del medio. Sé ha determinado experimentalmente que la velocidad del sonido en el agua aumenta con la temperatura hasta llegar a 73ºc. Por encima de este punto disminuye con la elevación de la temperatura. Se puede decir que el océano se divide en capas horizontales, en las que la velocidad de las ondas elásticas depende de la temperatura en las proximidades a la superficie del mar y de la presión en profundidad. Estas capas actúan como verdaderos canales de comunicación, SOFAR. Fig. 1.8 El canal SOFAR (Sound Fixing and Ranging channel), en español canal de sonido profundo, es una capa horizontal de agua en el cual la velocidad de sonido es en su mínima. El canal SOFAR actúa como guía de onda para el sonido, y para las ondas sonoras de baja frecuencia. Las ondas sonoras que se encuentran en el canal pueden viajar miles de kilómetros antes de disiparse. Se realizaron experimentos que consistía en detonaciones en las aguas de las Bahamas, para luego registrar en puntos lejanos la onda. El sonido de esa explosión llegó **nítidamente** hasta la costa occidental de África, a nada menos que 3200 kilómetros. Estos canales no son estables, cambiando con la época del año y las corrientes. Al aproximarse a los límites de las capas, la onda se curva similarmente a lo que sucede en el

aire que se encuentra a mayor temperatura en las proximidades de la superficie de la tierra. Este principio es similar a la transmisión de luz a larga distancia en una fibra óptica. Estas características de propagación de ondas elásticas en el océano alentaron diversos proyectos sobre todo con fines bélicos. También se conjeturo la existencia de un canal similar en la atmosfera, dando origen al proyecto Mogul desarrollado entre 1947 y 1948 en Estado Unidos.

3. La atenuación de los infrasonidos en el agua es baja, por tanto sería conveniente usarlos, pero el ancho de banda disponible para enviar información es bajo, téngase en cuenta que una estación de radio de AM requiere un ancho de banda de $10kHz$ y la separación entre estaciones se estipula en $30kHz$, por tanto se debe encontrar un compromiso entre atenuación y ancho de banda. Otro inconveniente es la coherencia espacial de la onda acústica. Si suponemos un ancho de banda de $200kHz$ el tiempo de coherencia será de

$$\delta t \approx \frac{1}{\delta \nu} = \frac{1}{200000Hz} = 5.10^{-6}s$$

Por tanto, la longitud de coherencia será

$$\delta l = c\delta t = 1500\frac{m}{s} \cdot 5.10^{-6}s = 7{,}5mm$$

Comparando con una longitud de onda media de $15mm$ vemos que es menor.

4 El instrumento de transmisión recepción de las ondas electromagnéticas son las antenas, que no es un transductor, puesto que no cambia la naturaleza de la señal. Mientras que en las ondas elásticas si es un transductor, estos generalmente son poco lineales lo cual acarrea una serie de inconvenientes.

De lo expuesto se ve que son varios los inconvenientes para usar como medio soporte de las ondas elásticas el agua de mar sin embargo se trabaja bastante en ese sentido y la última palabra no está dicha

Ejercicio

Investigue la posibilidad de usar a la tierra como medio soporte para comunicaciones a larga distancia, ya que la velocidad de las ondas longitudinales es bastante mayor que en el agua.

1.20 Ecuación de onda con amortiguamiento

Es común, en distintas áreas, hallar ecuaciones de ondas modificada que nace cuando se introduce rozamiento o cualquier otra fuerza disipativa que produzca un amortiguamiento. Este efecto suele representarse por el término $\delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ que surge, en el caso particular, en que el amortiguamiento es proporcional a la velocidad de la oscilación, luego la ecuación queda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]$$

Llamada ecuación del telegrafista. Si realizamos el cambio de variable siguiente

$$\varphi(x,t) = u(x,t)e^{-\frac{\delta t}{2}}$$

Derivando y sumando se llega

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{4}u\right]$$

Si $e^{-\frac{\delta t}{2}}$ lo escribimos de la forma $e^{-\frac{t}{t_0}}$ entonces $t_0 = \frac{2}{\delta}$ se lo llama modulo de decaimiento

Con frecuencia, δ es pequeño por lo tanto δ^2 es despreciable, quedando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Que es la ecuación de onda, por lo tanto, la solución es $u(x,t) = f(x-ct)$, luego

$$\varphi(x,t) = u(x,t)e^{-\frac{\delta t}{2}} = e^{-\frac{\delta t}{2}} f(x-ct)$$

Como $f(x-ct)$ es cualquier función arbitraria con la condición de que su argumento sea $x-ct$ .Siendo esta expresión la solución para el caso de un decaimiento temporal.

Existe otra manera de escribir la solución que a veces es útil, podemos suponer que $f(x-ct) = e^{-\frac{\delta}{2c}(x-ct)} g(x-ct)$ donde la función g es ahora la arbitraria. Remplazando en la expresión anterior. Queda $\varphi(x,t) = e^{-\frac{\delta x}{2c}} g(x-ct)$ es la función de onda con el agregado del factor exponencial dependiente de x.

Donde δ es el coeficiente de absorción o atenuación del medio. Muchas veces se expresa la atenuación en función de la pérdida de amplitud por ciclo, es decir, por el decrecimiento logarítmico.

La expresión anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$\varphi = A_0\, exp[-\delta x + i(\omega t - kx)] = A_0 exp[-\delta x + i\omega t - ikx] = A_0 expi[\omega t - k^* x]$$

Luego podemos definir al número de onda como un número complejo, cuya componente imaginaria representa la atenuación de la onda

$$k^* = k - i\delta$$

1.21 Impedancia Acústica

La relación entre la tensión σ, desplazamiento φ y v la velocidad de la partícula es de interés en las ondas elásticas. Como ejemplo introductorio consideremos una onda longitudinal plana que se propaga en un medio infinito

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

La velocidad de la partícula es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v(x,t) = -i\omega\varphi$$

Y como

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\lambda + 2\mu)ik\varphi$$

La razón de la tensión negativa (presión) y la velocidad de la partícula es llamada impedancia acústica

$$Z = -\frac{\sigma}{v} = \frac{(\lambda + 2\mu)k}{\omega}$$

Como para las ondas longitudinales $c^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ y teniendo en cuenta que $c = \dfrac{\omega}{k}$ entonces

$$Z = \frac{\rho c\, \omega}{\omega} = \rho c$$

El producto de la densidad del medio por la velocidad de la onda elástica es llamado impedancia acústica específica del medio. Generalmente el producto $c\rho$ tiene mayor importancia para caracterizar un medio que ρ o c por separados. En el ejemplo dado la impedancia acústica es una cantidad real, esto no es así para el caso de ondas estacionarias. En general la impedancia es compleja. De manera similar a como se la denomina en electricidad llamamos R a la resistencia acústica y X a la reactancia acústica del medio.

2

Así llegó a un inmenso castillo,
en cuyo frontispicio estaba grabado:
"A nadie pertenezco y a todos; antes de entrar,
ya estabas aquí, quedaras aquí, cuando salgas".
Denis Diderot

Capítulo 2 - CARACTERÍSTICA DE LOS SÓLIDOS

Comenzaremos definiendo términos que usaremos durante el desarrollo de los distintos temas. En las definiciones o aclaraciones nos limitamos a casos que sean de interés para el curso. Por ello muchas de ellas pueden que las encuentren parciales o que adolezcan de generalidad.

2.1 Ecuación constitutiva

En nuestro caso específico es una relación entre variables mecánicas o termodinámicas del sistema en cuestión, por ejemplo, una igualdad que relaciona la tensión con la deformación. En otro caso puede ser la relación entre corriente eléctrica y campo eléctrico o bien las leyes de fick.

2.2 Anisotropía y homogeneidad

Es conveniente aclarar desde el comienzo el significado de estos dos términos que usaremos más de una vez.
"Decimos que un medio es anisótropo si sus propiedades dependen de la dirección observada", esta definición es lo suficientemente amplia como para ser aplicada en distintas áreas de la ciencia, se observa también, que el término "propiedad" está totalmente ligado a la escala de observación de la propiedad. Puede suceder que una propiedad presente isotropía macroscópicamente y no sea así microscópicamente. También es importante aclara la dimensión involucrada en el problema estudiado, en algunos casos sucede que un determinado plano es isótropo y el espacio en general no lo sea. Un caso particular es el 1D, en el cual se debe tener en cuenta el sentido de propagación. En definitiva, queda claro que debemos precisar más muestra idea de anisotropía,

en nuestro caso en particular estudiaremos la propagación de ondas elásticas específicamente en sólidos, luego decimos: “Un medio es anisótropo si la velocidad de las ondas elásticas en el (3D) dependen de la dirección de propagación”.

“Un medio es homogéneo cuando tiene las mismas propiedades en todos los puntos”. En general hablamos de propiedades intensivas.

Podemos decir que un medio es “heterogéneo cuando sus propiedades a lo largo de una recta fija, varían al movernos por ella”. Otra manera de definir homogeneidad es decir que la parte más pequeña del sólido posee las mismas propiedades que el resto del mismo. Como vemos este término también está ligado a la especificación de una escala que para el caso de ondas seguramente será la longitud de onda.

A medida que comienzan a interactuar los átomos o las moléculas en un sólido aparecen nuevas propiedades. Las propiedades específicas de los cristales se deben a la simetría o a la anisotropía del cristal. La simetría del cristal es la propiedad de coincidir consigo mismo cuando se aplican transformaciones geométricas. Debe quedar claro que las propiedades de asimetría del cristal generan las asimetrías de las propiedades físicas del mismo. La simetría de las propiedades físicas de un cristal es consecuencia de las simetrías del cristal (**Principio de Neumann**). De otro modo “Los elementos de simetría de toda propiedad física de un cristal que depende de la estructura de éste deben incluir como mínimo a los elementos de simetría del cristal”. Más aun, el principio de superposición de simetrías: Llamado **Principio de Curie-Neumann** afirma; “Si un cristal se encuentra bajo la acción de una causa exterior al mismo, poseerá aquellos elementos de simetría que son comunes tanto al cristal en ausencia de causa externa como los de la causa externa sin cristal. El esquema de la Fig. 2.1 trata de ejemplificar este principio.

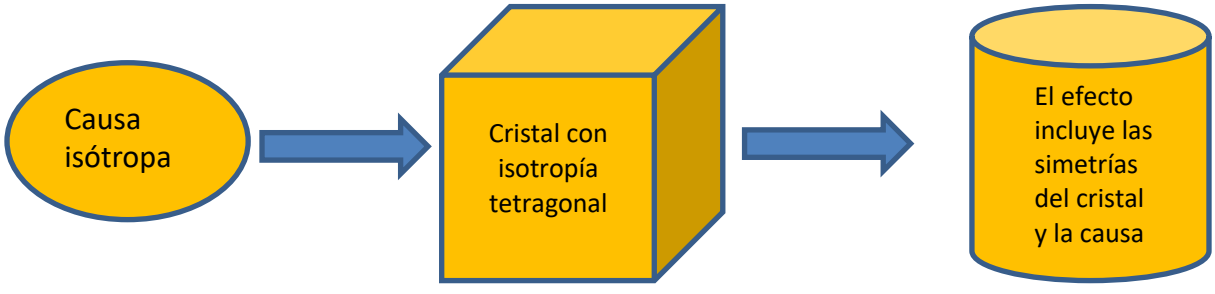


Fig. 2.1

La cristalografía nos indica que hay 32 clases de simetrías y la teoría de grupos las clasifica en 7 sistemas; triclínico, monoclínico, ortorrómbico, tetragonal, hexagonal, cúbico. A cada sistema de simetría se le asocia un tensor elástico.
En los medios anisótropos las constantes elásticas dependen de las direcciones en que se las mide, es de esperar que las velocidades de propagación de las ondas elásticas posean estas asimetrías. Un caso especial de anisotropía ocurre cuando las propiedades en una dirección determinada son iguales en todo el material, pero distinta en la dirección perpendicular a la anterior, en este caso la estructura se la llama ortotrópico, ejemplos de estos son los plásticos reforzados, maderas etc.

2.3 Módulos y Constantes de los Materiales

Solo mencionaremos a modo de repaso las constantes de utilidad en este trabajo, las deducciones formales de las mismas se las supone conocidas.

1. **Módulo de Elasticidad o de Young E**

$$\sigma = E\epsilon$$

σ: es el esfuerzo normal aplicado a la superficie
ϵ: es la elongación en la misma dirección $\epsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$,
$l_{0:}$ longitud inicial y l_1: longitud final

2. **Módulo de Rigidez o de Cizalladura G**

$$\tau = G\gamma$$

τ: es el esfuerzo de cizalla aplicado
γ:es el valor de la cizalla (tangente del ángulo de cizalla)

3. **Módulo de Volumen o Incompresibilidad K**

$$p = -\mathrm{K}\vartheta$$

p: Es la presión hidrostática
ϑ: Es el cambio de volumen $\vartheta = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$

V_0. Volumen inicial y V_1..volumen final.

4. **Coeficiente de Poisson ν**

$$\nu = \frac{\epsilon_{transversal}}{\epsilon_{longitudinal}}$$

ν puede tomar valores entre 0 y 0,5 y es menor cuando más rígido o duro es el material.
En la mayoría de los casos se da que ν tiene el mismo valor cuando el material es tensionado o comprimido. El coeficiente de Poisson es constante sólo en el intervalo de deformación elástica.

2.4 Sobre el tensor de desplazamiento

Supongamos que un cuerpo se deforma debido a la acción de alguna fuerza o por un cambio en la temperatura que genera dilatación. Esta deformación causa un movimiento o un desplazamiento relativo de las partículas en un pequeño entorno de cada punto del sólido. Debe quedar claro que no hablamos del movimiento del sólido como un todo, como es tratado en cinemática. Para este fin se considera al sólido en dos estados, uno previo sin deformación y otro posterior, deformado. En la literatura específica se encuentran varias maneras de encarar el tema, algunas muy generales que consideran la deformación como una transformación entre el estado sin deformar y el deformado. En nuestro caso parece más apropiado el desarrollo realizado en el libro “vectores y tensores” de L. Santaló.
Como indica el esquema Fig. 2.2, tomamos dos puntos del sólido P y Q, (en rojo) antes de la deformación, luego generamos un sistema de coordenadas Cartesiano.

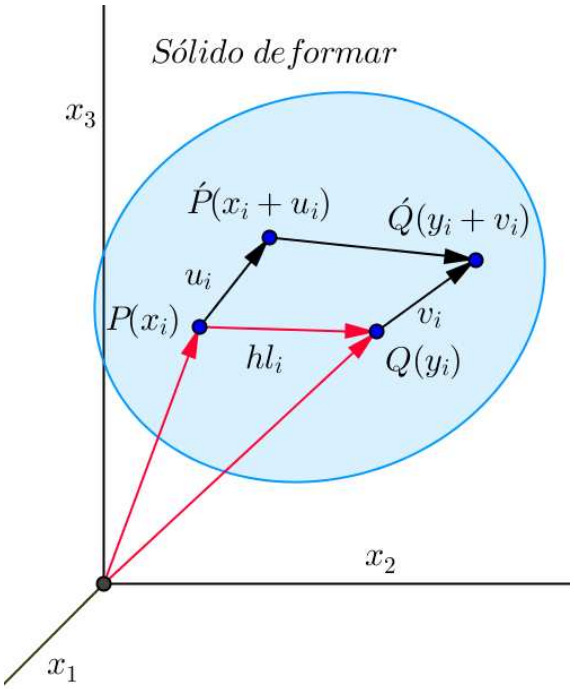


Fig. 2.2

El objetivo es encontrar el cociente que nos da la variación relativa de la deformación, en nuestro caso es:

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}}$$

Expresión corriente que define la deformación. Supongamos que la distancia entre los puntos $P(x_i)$ y $Q(y_i)$ es h y $\check{l}_i$ es el versor que los une, entonces

$$y_i = x_i + hl_i$$

Luego el cuerpo sufre una deformación, cada punto del mismo soporta un desplazamiento. La deformación puede considerarse como es un campo vectorial aplicado a cada punto del sólido, en nuestro caso las deformaciones de los puntos en cuestión son u_i y v_i. Estas desplazan los puntos

$$P(x_i) \Longrightarrow \grave{P}(x_i + u_i) \text{ y } Q(y_i) \Rightarrow \grave{Q}(y_i + v_i)$$

Calculemos ahora $\overline{P'Q'} = y_i + v_i - (x_i + u_i)$ luego

$$\left(\overline{P'Q'}\right)^2 = [x_i + hl_i + v_i - (x_i + u_i)]^2 = (hl_i + v_i - u_i)(hl_i + v_i - u_i) =$$

$$= h^2 l_i l_i + hl_i v_i - hl_i u_i + v_i hl_i + v_i v_i - v_i u_i - u_i hl_i - u_i v_i + u_i u_i =$$

Simplificando y despreciando los términos de segundo orden en los desplazamientos queda

$$= h^2 l_i l_i + 2h l_i v_i - 2h l_i u_i$$

Recordando que l_i es un versor

$$\left(\overline{P'Q'}\right)^2 = h^2 + 2h l_i (v_i - u_i) = h^2 \left[1 + 2 l_i \frac{v_i - u_i}{h}\right]$$

Teniendo en cuenta que los desplazamientos son pequeños y h tambien podemos expresar las componentes de v_i en función de u_i y de sus derivadas parciales, como por Taylor

$$v_i = u_i(x_i + h l_i)$$

$$v_i = u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h l_j = u_i + u_{i,j} h l_j \;\; \therefore \;\; v_i - u_i = u_{i,j} h l_j$$

$$\overline{P'Q'} = h\sqrt{\left[1 + 2 l_i \frac{v_i - u_i}{h}\right]} = h\sqrt{\left[1 + 2 u_{i,j} l_j l_i\right]}$$

Recordando que $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

$$\overline{P'Q'} = h\left[1 + \frac{1}{2}(2 u_{i,j} l_j l_i)\right] = h\left(1 + u_{i,j} l_j l_i\right)$$

Reemplazando las expresiones halladas de las longitudes, no los vectores, queda

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{h\left(1 + u_{i,j} l_j l_i\right) - h}{h} = u_{i,j} l_j l_i$$

Como todo tensor de segundo orden es suma de uno simétrico y otro antisimétrico

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right)$$

El tensor antisimétrico es el rotor u_i o sea $\vec{\nabla}.\vec{u}$, que está asociado a una rotación rígida y no aporta sobre la deformación, luego nos quedamos con

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Llamado Tensor de deformación o de Cauchy y nos permite calcular la deformación en cualquier dirección l_i.

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = u_{i,j} l_j l_i = \epsilon_{ij} l_j l_i$$

Por la forma de obtenerlo queda claro que ϵ_{ij} es un tensor simétrico.

La traza del tensor ϵ_{ij} es el invariante lineal $\epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \vec{\nabla}.\vec{u} = \vartheta$ y es la divergencia del vector u_i nos da el cambio de volumen relativo producido por la deformación del sólido. Los términos ϵ_{ij} con $i \neq j$ representan deformaciones angulares; $\Delta\theta_{12} = 2\epsilon_{12}$, $\Delta\theta_{13} = 2\epsilon_{13}$, $\Delta\theta_{23} = 2\epsilon_{23}$

Existe un ejemplo clásico que fácilmente muestra la diferencia entre deformación y desplazamiento. Para ello consideremos una viga empotrada en un extremo. Si la cargamos en el otro extremo se flexiona (reversible), como indica el esquema de la Fig. 2.3.

Las deformaciones son máximas en el extremo empotrado y cero en el extremo libre, mientras que los desplazamientos son cero en el extremo empotrado y máximos en el extremo libre.

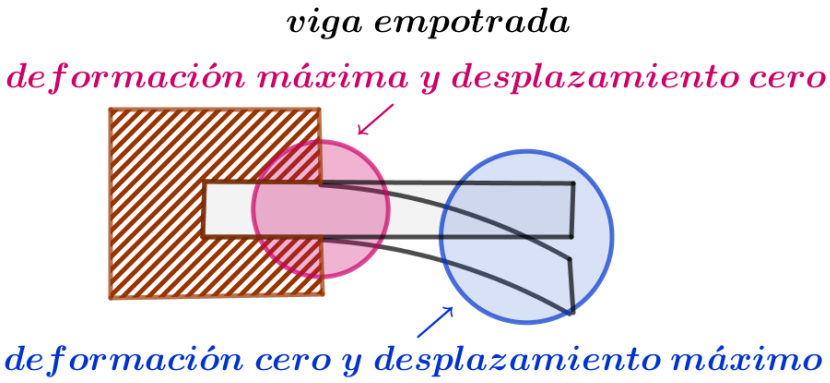


Fig. 2.3

2.5 Sobre el tensor de tensiones

En general se puede hablar de dos tipos de fuerzas que actúan sobre un sólido: las de volumen o de cuerpo que actúan a distancia y las de superficie que se manifiestan por contacto. Las de volumen actúan sobre todo el cuerpo simultáneamente, luego deben tratarse como fuerzas por unidad de volumen o masa. Ejemplo de este tipo de fuerza es la atracción gravitacional, la fuerza que ejerce un campo magnético o eléctrico. Por el contrario, las de superficie son fuerzas que actúan sobre superficies o fronteras del sólido, por ejemplo, la fuerza de fricción o de rozamiento entre dos cuerpos. La acción de estas fuerzas no se manifiesta sobre todo el cuerpo solo en la superficie de contacto, localmente, luego es transmitida al interior.

2.6 Concepto de tensión

Para hallar la distribución de las fuerzas internas que actúan en un punto de una sección de un sólido, cuya normal llamamos $\breve{n}$, se introduce la idea de Tensión $(\vec{T})$. Como observamos en la Fig. 2.4 Por definición, la Tensión que actúa en un punto de un sólido y en un plano de normal $\breve{n}$ que pasa por él es

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

donde: ΔA es el área donde actúa la fuerza $\Delta \vec{F}$. Luego la tención es un vector por unidad de área. En general el vector tensión se descompone en tres vectores según los ejes σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz}. Al estar asociado el vector de tensión a un plano determinado que pasa por el punto en cuestión, la magnitud y dirección de la tensión depende también del plano que se considere.

La tensión σ es un vector, pero no es un campo vectorial, porque en cada punto P del espacio hay una infinidad de vectores σ, uno por cada dirección de $\breve{n}$ en el espacio.

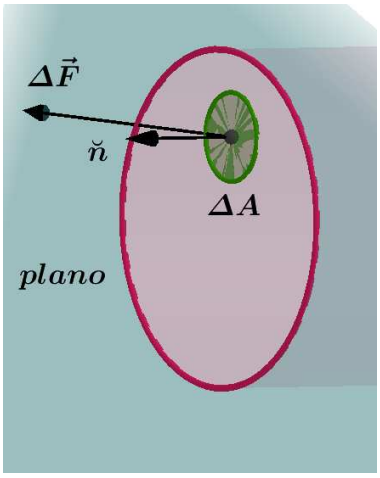


Fig. 2.4

Los esfuerzos internos en un sólido son descriptos por un tensor de segundo orden, “Tensor de Tensiones” es imposible hacerlo con un solo vector. Supongamos la cara de un paralelepípedo elemental como el mostrado en la Fig. 2.5, sobre el actúa la tención T. Se introduce un sistema cartesiano ortogonal.

La tensión es descompuesta en una perpendicular al plano de la cara del paralelepípedo y otra contenida en el plano. Fig. 2.5 La tensión perpendicular es

llamada.σ_{33} por ser normal al plano definido por la coordenada x_3. Convenimos en asignar signo positivo a las tensiones normales de tracción y negativo si es de compresión.

Prosiguiendo de esta manera obtenemos las componentes las dos componentes según los ejes coordenados, llamados tensiones de corte,

En el caso de las tensiones tangenciales se dice que son positivas si tienen él mismo sentido que los ejes coordenados.

Las tensiones de corte sobre caras opuestas forman pares de fuerzas, como el sistema se encuentra en equilibrio el momento total debe ser nulo, por tanto, planteando las ecuaciones de los momentos se llega:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}\ , \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Indicando que es un tensor simétrico

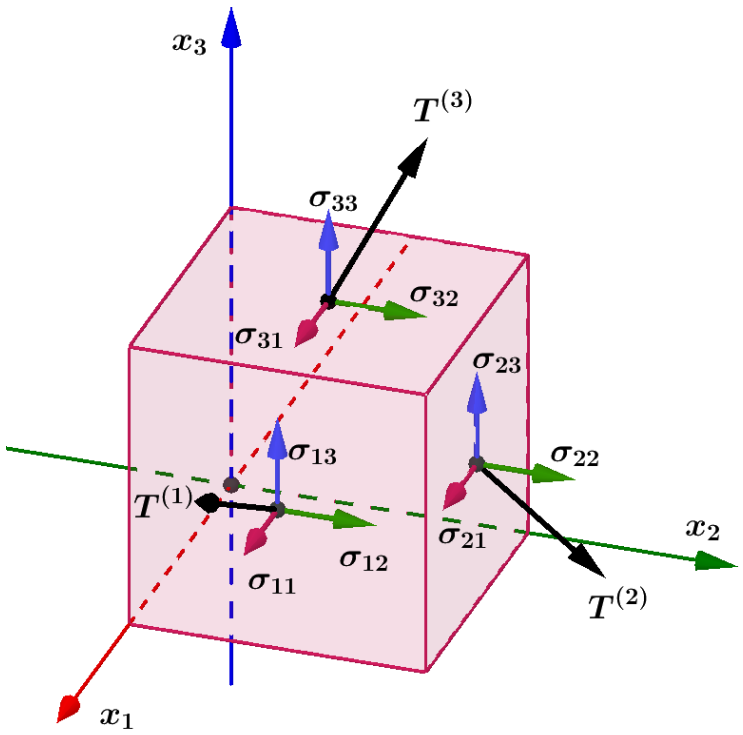


Fig. 2.5

2.7 Formula de Cauchy - Tetraedro de Cauchy

Dado que el sistema se encuentra en equilibrio, se debe cumplir que la suma de las fuerzas que actúa en un entorno infinitesimal de un punto que forma un tetraedro debe ser cero. Ver esquemas de la Fig. 2.6 Suponemos que las fuerzas son solo de contacto, no hay fuerzas de volumen.

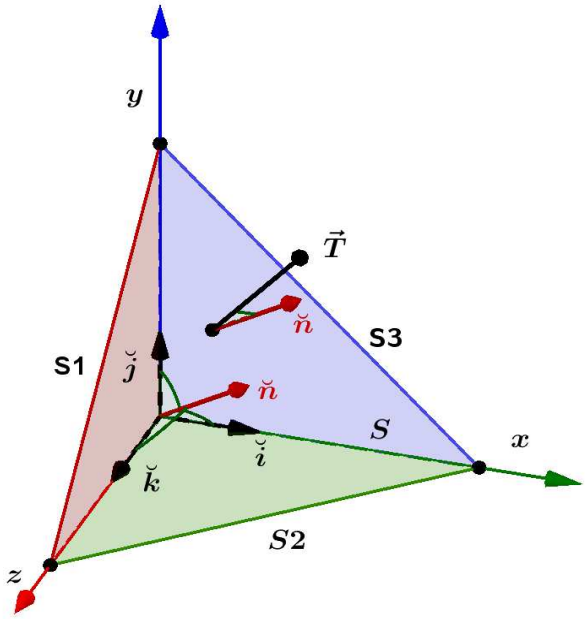


Fig. 2.6

Trabajemos con la condición de equilibrio para un solo eje, por ejemplo, el x_1 , (x), luego, realizamos la suma de las fuerzas en esa dirección:

En la cara S del tetraedro la fuerza es T_xS

En la cara S_1 del tetraedro la fuerza es $\sigma_{11}S_1$

En la cara S_2 del tetraedro la fuerza es $\sigma_{21}S_2$

En la cara S_3 del tetraedro la fuerza es $\sigma_{31}S_3$

$$T_x\text{S}= \sigma_{11}S_1 + \sigma_{21}S_2 + \sigma_{31}S_3$$

$$T_x\text{S}= \sigma_{11}\text{S}\cos(\check{\imath}\check{n}) + \sigma_{21}\text{S}\cos(\check{\jmath}\check{n}) + \sigma_{31}\text{S}\cos(\check{k}\check{n})$$

$$T_x= \sigma_{11}\cos(\check{\imath}\check{n}) + \sigma_{21}\cos(\check{\jmath}\check{n}) + \sigma_{31}\cos(\check{k}\check{n})$$

$$T_j = \sigma_{1j}\, n_1 + \sigma_{2j} n_2 + \sigma_{3j}\, n_3$$

$$T_i = \sigma_{ij}\, n_j \quad \text{llamada formula de Cauchy}$$

Observemos que, donde se desea calcular la tensión, pasan infinitos planos. Definimos uno en particular dando el versor n_j perpendicular al mismo. De otro modo, en un punto de un sólido puede existir más de una tensión, dependiendo de la orientación del plano que se elige. Esta es la razón por la cual es necesario trabajar con tensores.

Problema

Tenemos un plano cuyo vector normal es $\nu_j = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ encuentre el valor de la tensión en el plano sabiendo que el tensor de tensiones vale

$$\sigma_{ij=}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la expresión de Cauchy

$$T_i = \sigma_{ij}\nu_j$$

$$T_i = \sigma_{i1}\nu_1 + \sigma_{i2}\nu_2 + \sigma_{i3}\nu_3$$

Luego

$$T_1 = 7\frac{\sqrt{3}}{3} + 0\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

Se procede de igual manera con las otras dos componentes, dando

$$T_i = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3}, \frac{5}{3}\sqrt{3}, \ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

El módulo será $|T_i| = T_i T_i \cong 7\frac{\sqrt{3}}{3}$, la componente de T_i normal al plano es $T_i\nu_i = 4$

Mientras que la de T_i componente normal a ν_j es el producto vectorial entre T_i y ν_j luego

$$\left(T_i \wedge \nu_j\right)_k = \varepsilon_{kij} T_i \nu_j = (-1,1,0)$$

2.8 Ley Hooke Generalizada

Como sabemos, al aplicar un esfuerzo a un cuerpo, este se deforma. Si el esfuerzo es pequeño al suprimirlo el cuerpo retoma su estado inicial. Esto nos lleva a suponer que las tensiones son funciones de las deformaciones.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl})$$

Si desarrollamos en serie la tensión alrededor del origen tendremos

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}\right)_{\epsilon_{kl}=0} \epsilon_{kl} + \cdots$$

Suponiendo que las deformaciones son pequeñas y que se deben solo a la existencia de tensiones luego, (linealidad).

$$\sigma_{ij}(0) = 0$$

Llamando

$$C_{ijkl} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}\right)_{\epsilon_{kl}=0}$$

Queda

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de las constantes elásticas y es 4° orden con 81 coeficientes independientes, en su forma más general, que describen el comportamiento elástico del sólido, coeficientes que son constantes si el medio es homogéneo.

$$\sigma_{ij} = C_{ij11}\epsilon_{11} + C_{ij12}\epsilon_{12} + C_{ij13}\epsilon_{13} + C_{ij21}\epsilon_{21} + C_{ij22}\epsilon_{22} + C_{ij23}\epsilon_{23} + C_{ij31}\epsilon_{31} + C_{ij32}\epsilon_{32} + C_{ij33}\epsilon_{33}$$

Esta última expresión representa nueve igualdades con nueve términos en su segundo miembro.

Se supuso por simplicidad que en el estado inicial las tensiones son nulas. En muchos casos esto no es cierto, por tanto se debe añadir un término, llamado tensión residual σ_{ij}^0 al miembro de la derecha de la ecuación, luego

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$$

Por el contrario, si el problema presenta una deformación inicial no nula para tensión nula se debe escribir la ecuación de la manera siguiente

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0)$$

En este caso ϵ_{kl}^{0} representa la deformación para tensión cero. Estos dos casos no afectan los valores de las componentes del tensor C_{ijkl}.

Un caso de deformaciones preexistentes pueden ser producidas por cambios de temperatura, a estas deformaciones las llamamos ϵ^{T} y producen en el sólido compresión o expansión, con ausencia de tensiones de corte.

Sabemos que la variación de la longitud con temperatura es linealmente dependiente de T

$$l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta T) \quad \therefore \quad \Delta l = l_1\alpha\Delta T \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_1} = \alpha\Delta T$$

Llamando l_2 y l_1 a las longitudes final e inicial, α es el coeficiente de dilatación lineal, luego para solidos térmicamente isótropos y homogéneo (α constante) podemos escribir el tensor de deformaciones térmicas de la forma siguiente

$$\epsilon_{ij}^{T} = \alpha\Delta T\delta_{ij}$$

La deformación total será

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{T})$$

Si el sólido no es isótropo el tenso de deformaciones térmicas adquiere la forma

$$\epsilon_{kl}^{T} = \alpha_{kl}\Delta T$$

Donde α_{ij} es un tensor simétrico que representa a los coeficientes de dilatación térmica. Si trabajamos con α_{kl} y ϵ_{kl}^{T} en un sistema de componentes principales se tendrá

$$\epsilon_{i}^{T} = \alpha_i\Delta T, \text{ Para cada eje.}$$

Se debe aclarar que no existe ninguna razón para expresar la tensión en función de la deformación.

Es igualmente posible expresar la deformación como una función de la tensión, esta suele expresarse como

$$\epsilon_{ij=}S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

Los coeficientes de S_{ijkl} (constantes de docilidad o compliance) pueden ser hallados en función de los coeficientes de C_{ijkl} (constantes de rigidez). Los coeficientes de C_{ijkl} y de S_{ijkl} forman un tensor de cuarto orden esto significa que al cambiar de coordenadas cartesiano ortogonal del mismo origen, del tipo

$$x_i^{*} = a_{ij}x_j \quad (i, j = 1,2,3)$$

Donde a_{ij} son los cosenos directores que determinan la orientación de los nuevos x_i^* ejes respecto a los viejos x_j , el tensor de cuarto orden se transforma de la siguiente manera

$$C_{ijkl}^* = a_{ih}a_{jt}a_{kn}a_{lm}C_{htnm}$$

Una expresión equivalente se obtiene para S_{ijkl}. Las componentes del tensor dependen del sistema de coordenadas, al cambiar de sistema se modifican las componentes no el tensor. Los tensores que no cambian las componentes cuando cambiamos de sistema de coordenadas se los llama isótropos. Por ejemplo el tensor de Kronecker δ_{ij}es isótropo.

Demostrar que σ_{ij} es un tensor

Consideremos una transformación lineal ortogonal definida por la matriz $A = a_{ij}$ que transforma las coordenadas x_i en x_i^*. De tal manera que se cumple

$$x_i = a_{ij}x_j^* \text{ o bien } x_i^* = a_{ji}x_j$$

De manera matricial

$$\vec{X} = A\overrightarrow{X^*} \text{ o bien } \overrightarrow{X^*} = A^{-1}\vec{X} = A^t\vec{X}$$

Por ser la transformación ortogonal $A^{-1} = A^t$.Teniendo en cuenta la expresión de Cauchy $T_m = \sigma_{mn}\nu_n$ luego cambiando de sistema de coordenadas

$$T_i^* = a_{mi}T_m = a_{mi}\sigma_{mn}\nu_n = a_{mi}\sigma_{mn}a_{nj}\nu_j^*$$

$$T_i^* = \sigma_{ij}^*\nu_j^* = a_{mi}\sigma_{mn}a_{nj}\nu_j^*$$

$$\sigma_{ij}^* = a_{mi}\sigma_{mn}a_{nj} \Rightarrow \sigma^* = A^t\sigma A$$

$$\sigma_{ij}^* = a_{mi}a_{nj}\sigma_{mn}$$

Se transforma como un tensor.

Demostración de que C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden

Partimos de $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ como σ_{ij} y ϵ_{kl} son tensores y se transforman como tales frente a un cambio de coordenadas ortogonal

$$\sigma_{mn}^* = a_{im}a_{jn}\sigma_{ij} = a_{im}a_{jn}C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

Pero

$$\epsilon_{kl} = a_{ku}a_{lp}\epsilon_{up}^*$$

$$\sigma^*_{mn} = a_{im}a_{jn}a_{ku}a_{lp}C_{ijkl}\epsilon^*_{up}$$

$$C^*_{mnup} = a_{im}a_{jn}a_{ku}a_{lp}C_{ijkl}$$

Luego se transforma como un tensor de cuarto orden.

2.9 Comportamiento de los materiales frente a cargas uniaxiales

Suponiendo conocido la manera de actuación de un material a la acción de una carga uniaxial, se puede inferir tres comportamientos ideales de los mismos:

1. Comportamiento elástico, se caracteriza por que la deformación se recupera totalmente cuando cesa la tensión que la ocasiona.
2. Comportamiento plástico, la deformación no es recuperada cuando la tensión deja de actuar.
3. Comportamiento viscoso, la deformación sigue manifestándose a lo largo del tiempo a una tensión constante.

Nuestro interés radica solo en el modelo elástico, dentro de este a su vez es posible establecer tres distinciones: hiperelástico, elástico y hipoelástico de los tres trabajaremos solo con los hipoelástico.

2.10 Energía de Deformación

Es el aumento de la energía en el interior de un sólido por causa del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación.

Cuando un sólido es deformado parte de la energía se utiliza en generar defectos tales como fisuras, multiplicación de dislocaciones, calor, plasticidad, rotura, etc. estos procesos son irreversibles y esta energía es irrecuperable. La otra parte de la energía puede ocasionar cambios reversibles y por supuesto puede ser recuperada, comúnmente llamada energía potencial elástica.

En el caso general de un sólido hipoelástico, durante un proceso de deformación reversible a temperatura constante, los incrementos de energía potencial elástica

E_p, de energía interna U y de energía libre de Helmholtz $F = U - ST$ por unidad de volumen son iguales. Si δW es el trabajo de las fuerzas externas se demuestra que

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS + \delta W, \text{ reemplazando en}$$

$$dF = dU - SdT - TdS = TdS + \delta W - SdT - TdS = \delta W - SdT$$

Si el proceso es isotérmico y reversible tenemos

$$dF = \delta W = dE_P$$

Lo afirmado.

2.11 Materiales Hipoelásticos

Son aquellos para los cuales existe una función "potencial" $E_P(\epsilon_{ij})$, definida, por analogía con la mecánica, cuando se habla del gradiente de una función de punto que nos da la fuerza que actúa sobre una partícula. Tratemos que justificar esta afirmación, para tal fin consideremos la curva tensión deformación en su zona reversible, para un dado valor ϵ la densidad de energía de deformación es

$$E_P(\epsilon) = \frac{1}{2}\sigma\epsilon = \frac{1}{2}E\epsilon^2$$

Donde E es el módulo de Young. De acuerdo a esta expresión

$$\sigma = \frac{\partial E_P(\epsilon)}{\partial \epsilon} = E\epsilon$$

Por tanto, para la ley de Hooke generalizada será

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial E_P(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}}$$

La integral de $E_P(\epsilon_{ij})$ en el volumen que ocupa el sólido es la energía de deformación, reversible.

$$Energia\ de\ deformación = \int E_P(\epsilon) dV$$

La densidad energía potencial elástica es el producto del tensor de tensiones por el tensor de deformación

$$E_P = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$$

Se puede interpretar esta expresión como la suma de las áreas bajo las curvas tensión-deformación para cada una de las componentes del tensor. Obsérvese que la $E_P(\epsilon_{ij})$ es una función cuadrática de la deformación.

Primera propiedad de simetría

En todos los casos se utiliza la simetría del tensor de tensiones y el de deformación. Partiendo de

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$
$$\sigma_{ij} = C_{ijlk}\epsilon_{lk}$$

Restando miembro a miembro

$$0 = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - C_{ijlk}\epsilon_{lk} = C_{ijlk}\epsilon_{kl} - C_{ijkl}\epsilon_{kl} = (C_{ijlk} - C_{ijkl})\epsilon_{kl}$$ Luego

$$C_{ijlk} = C_{ijkl}$$

Entonces el tensor de rigidez es simétrico con respecto a los dos últimos índice

Segunda propiedad de simetría

De igual manera como el tensor de tensiones es simétrico se deduce

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$
$$\sigma_{ji} = C_{jikl}\epsilon_{kl}$$

Restando ambas expresiones

$$(C_{ijkl} - C_{jikl})\epsilon_{kl} = 0$$

$$C_{ijlk} = C_{jilk}$$

Por lo tanto C_{ijkl} es simétrico respecto a los dos primeros índices.

Tercera propiedad de simetría

Partimos de la densidad de energía potencial

$$E_P = \frac{1}{2} C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$$

Luego escribimos la energía para igual estado

$$E_P = \frac{1}{2} C_{klij}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}$$

Restando y como $E_P(\epsilon_{ij})$ es una función de estado

$$0 = \frac{1}{2} C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} - \frac{1}{2} C_{klij}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} - C_{klij})\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$$

Se llega a la tercera propiedad de simetría

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Problema

Demuestre la tercera propiedad de simetría derivando $E_P(\epsilon_{ij})$.
Partimos de

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial E_P(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}}\left(\frac{1}{2} C_{klij}\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}\right)$$

Cambiando los subíndices sobre los que se deriva queda

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}}\left(\frac{1}{2} C_{klpn}\epsilon_{kl}\epsilon_{pn}\right) = \frac{1}{2} C_{klpn}\left(\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}}\epsilon_{pn} + \frac{\partial \epsilon_{pn}}{\partial \epsilon_{ij}}\epsilon_{kl}\right)$$

Como

$$\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{lj}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}C_{klpn}\left(\delta_{ki}\delta_{lj}\epsilon_{pn} + \delta_{pi}\delta_{nj}\epsilon_{kl}\right) = \frac{1}{2}\left(C_{klpn}\delta_{ki}\delta_{lj}\epsilon_{pn} + C_{klpn}\delta_{pi}\delta_{nj}\epsilon_{kl}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(C_{ijpn}\epsilon_{pn} + C_{klij}\epsilon_{kl}) = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\epsilon_{kl} + C_{klij}\epsilon_{kl})$$

Por la ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

Luego

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

2.12 Notación de Voigt

La permutación de los pares (i,j) y (k,l) no modifica al tensor de rigidez.
Las dos primeras propiedades de simetría del tensor de rigidez reducen el número de elementos independientes a solo 36. Aplicando la tercera propiedad de simetría se reducen a 21elemento.
Por lo tanto, un material elástico lineal anisotrópico tiene 21 constantes del material, luego el tensor de tensiones puede escribirse, teniendo en cuenta las simetrías

$$\sigma_{ij} = C_{ij11}\epsilon_{11} + C_{ij22}\epsilon_{22} + C_{ij33}\epsilon_{33} + 2C_{ij23}\epsilon_{23} + 2C_{ij31}\epsilon_{31} + 2C_{ij12}\epsilon_{12}$$

Que escribiéndolo en forma matricial da

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_{1111}C_{1122}C_{1133}C_{1123}C_{1131}C_{1112}\\ C_{1122}C_{2222}C_{2233}C_{2223}C_{2231}C_{2212}\\ C_{1133}C_{2233}C_{3333}C_{3323}C_{3331}C_{3312}\\ C_{1123}C_{2223}C_{3323}C_{2323}C_{2331}C_{2312}\\ C_{1131}C_{2231}C_{3331}C_{2331}C_{3131}C_{3112}\\ C_{1112}C_{2212}C_{3312}C_{2312}C_{3112}C_{1212}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

Utilizando la llamada notación de Voigt, la cual consiste en representar pares de índices de la manera siguiente

$$11 \rightarrow 1 \quad --- \quad 23 = 32 \rightarrow 4$$
$$22 \rightarrow 2 \quad --- \quad 13 = 31 \rightarrow 5$$
$$33 \rightarrow 3 \quad --- \quad 12 = 21 \rightarrow 6$$

Luego el tensor de las constantes elásticas se lo puede escribir en forma matricial y se evita que aparezcan factores numéricos, ejemplo

$$\sigma_{11} = C_{11kl}\epsilon_{kl} = C_{1111}\epsilon_{11} + C_{1112}\epsilon_{12} + C_{1113}\epsilon_{13} + C_{1121}\epsilon_{21} + C_{1122}\epsilon_{22} + C_{1123}\epsilon_{23} + C_{1131}\epsilon_{31} + C_{1132}\epsilon_{32} + C_{1133}\epsilon_{33}$$

Pasando a la nueva notación

$$\sigma_{11} = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{14}\epsilon_4 + C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6$$

De manera matricial queda

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

Puesto que con esta nomenclatura C_{ijkl} paso a ser un matriz C_{mn}, para transformarlas de un sistema de coordenadas a otro previamente debemos regresar a la notación tensorial o bien trabajar con la matriz C_{mn} aclarando que $m, n = 1,2, \ldots, 6$ y teniendo en cuenta $\sigma_m = C_{mn}\epsilon_n$

2.13 Reducción de las constantes en casos de simetrías

Vimos que luego de aplicar las propiedades generales de simetría de los tensores nos quedamos el tensor de las constantes elásticas con 21 componente. De acuerdo a las simetrías que posee un cristal en particular pueden reducirse aún más el número de constantes. Describimos brevemente, con un ejemplo, cómo se

lleva a cabo. Si un monocristales tiene un plano de simetría, entonces las deformaciones deben ser simétricas respecto de este plano cuando se aplican tensiones también simétricas respecto al mismo plano. Esta afirmación es comprobable experimentalmente. Dicho matemáticamente, significa que las tensiones, deformaciones y tensor C_{ijkl}, deben ser iguales ante la transformación especifica (en este caso de simetría). Ejemplo; pasamos del sistema de coordenadas $[x_1, x_2, x_3]$ al sistema $[x_1^*, x_2^*, x_3^*]$ si el plano de simetría del cristal es el que contiene a los eje x_1, x_2 y realizo la operación que transforma x_3 en $-x_3$, luego nos queda $x_1^* = x_1$, $x_2^* = x_2$ y $x_3^* = -x_3$ Fig. 2.7

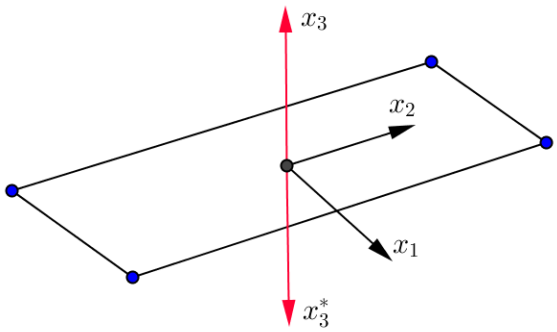


Fig. 2.7

Se debe cumplir

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \text{ en el sistema de coordenadas } [x_1, x_2, x_3]$$

y también

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}^*\epsilon_{kj}^* \text{ en el sistema de coordenadas } [x_1^*, x_2^*, x_3^*]$$

$$\text{con } C_{ijkl} = C_{ijkl}^* \quad \epsilon_{kj} = \epsilon_{kj}^* \text{ y } \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$$

La matriz de la transformación de simetría es

$$a_{ij} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La idea es aplicar la ley de transformación de tensores y hallar σ^* y ϵ^*

$$\sigma^* = A^t \sigma A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \epsilon^* = A^t \epsilon A = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & -\epsilon_{23} \\ -\epsilon_{31} & -\epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Cambiando de notación $\epsilon^* = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, -\epsilon_4, -\epsilon_5, \epsilon_6)$

y reemplazar el resultado en σ^*para luego compara con σ que deben ser iguales

$$\sigma_{11}^* = C_{11}\epsilon_1^* + C_{12}\epsilon_2^* + C_{13}\epsilon_3^* - C_{14}\epsilon_4^* - C_{15}\epsilon_5^* + C_{16}\epsilon_6^*$$

$$\sigma_{11} = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{14}\epsilon_4 + C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6$$

Como $\sigma_{11} = \sigma_{11}^*$ resulta que necesariamente $C_{14} = 0$ y $C_{15} = 0$

Siguiendo un razonamiento análogo se encuentra que para este caso de simetría solo es necesario 13 constantes. Luego de acuerdo a las simetrías que presenta la estructura se reduce el número de constantes del tensor.

En algunos casos simple es posible, informalmente, llegar al resultado sin plantearlo analíticamente. Consideremos un cristal que tenga un eje de simetría por tal razón la dirección x_3 pasa a -$x_3 = x_3^*$ también al rotar $x_2 \Longrightarrow -x_2 = x_2^*$ y x_1 queda igual Fig. 2.8

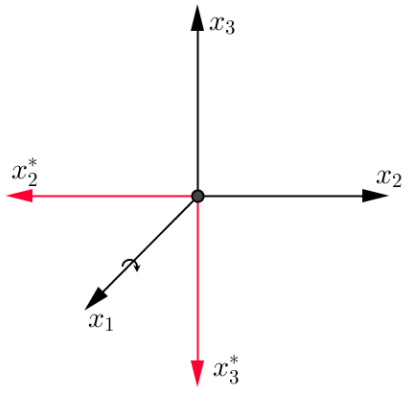


Fig. 2.8

Por tanto, las componentes de la matriz de las contantes elásticas se transforman de la siguiente manera teniendo en cuenta la notación de Voigt

$$1 = 11 \Longrightarrow 11 = 1$$
$$2 = 22 \Longrightarrow (-2)(-2) = 22 = 2$$
$$3 = 33 \Longrightarrow (-3)(-3) = 33 = 3$$

$$4 = 23 \Longrightarrow (-2)(-3) = 23 = 4$$
$$5 = 13 \Longrightarrow 1(-3) = -13 = -5$$
$$6 = 12 \Longrightarrow 1(-2) = -12 = -6$$

Luego la matriz cambia de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{15} & -C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & -C_{25} & -C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & -C_{35} & -C_{36} \\ & & & C_{44} & -C_{45} & -C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} =$$

Por tanto, los términos negativos deben ser cero para seguir siendo iguales

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} =$$

La presencia de un eje de simetría redujo las constantes a solo 13. Los únicos cristales que tienen 21 constantes elásticas independientes son aquellos que no poseen ningún tipo de simetría, se los llama triclínicos. Seguidamente se mencionan las distintas estructuras cristalinas el número de constantes independiente y los planos de simetría.

Estructura cristalina	Número de constantes independientes	Planos de simetría
Triclínico	**21**	**0**
Monoclínico	**13**	**1**
Ortotrópico	**9**	**2**
Tetragonal	**6**	**2**
Hexagonal	**5**	**2**
Cubico	**3**	**3**
Isótropo	**2**	**3**

2.14 Medio Isótropo

Determinemos el tensor de las constantes elásticas para un medio isótropo. Aceptemos que el único tensor isótropo de cuarto orden es de la forma

$$\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$$

Luego como nuestro medio es isótropo el tensor C_{ijkl} deberá tener el siguiente aspecto

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$$

Como $C_{ijkl} = C_{jikl}$

$$C_{jikl} = \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + \mu\delta_{jk}\delta_{il} + \nu\delta_{jl}\delta_{ik}$$

Restando m.a.m

$$0 = (\mu - \nu)\delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{por lo tanto } \mu = \nu$$

Luego

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Donde las constantes son los coeficientes de Lamer. Como el medio y el tensor son isótropos este último tiene las mismas componentes en cualquier sistema de coordenadas

Teniendo en cuenta la ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]\epsilon_{kl}$$

$$= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}\epsilon_{kl}$$

$$= \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \mu\epsilon_{ij} + \mu\epsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\,\mu\epsilon_{ij}$$

Expresión de la ley de Hooke para un medio isótropo.

Las constantes de Lamé. λ y μ se pueden expresar en termino de otros parámetros elásticos como son por ejemplo el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

O bien en función del módulo de incompresibilidad K que da la razón entre el cambio de presión y el correspondiente cambio relativo de volumen

$$K = -V\frac{\Delta P}{\Delta V} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

El coeficiente de Poisson proporciona una medida del estrechamiento de la sección prismática de un material lineal elástico e isótropo, cuando se lo estira longitudinalmente. La mayoría de los materiales tiene un coeficiente de Poisson comprendido entre $0 < \nu < 0{,}5$, existiendo otros materiales llamados augéticos que presentan coeficiente negativo.

Partiendo de

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Se llega al tensor de las constantes elásticas para un medio isótropo

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Otros sólidos

Cada sólido, de acuerdo a su simetría, tiene asociado una forma particular del tensor de tensiones, seguidamente se escriben algunos de ellos

a) Cubico, tres constantes elásticas

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

b) Hexagonal, cinco constantes elásticas

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11}-2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}-2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

c) Ortorrómbico, nueve constantes elásticas

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Monoclínico, trece constantes elásticas.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Problema

Determinar la relación entre tensión y deformación para un medio isótropo lineal cuyo coeficiente de expansión térmica es α y coeficientes de Lame λ , μ , para una variación de temperatura ΔT.

Como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^{T}) = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \alpha\Delta T\delta_{kl}) = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - C_{ijkl}\alpha\Delta T\delta_{kl}$$

$$= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\,\mu\epsilon_{ij} - \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]\alpha\Delta T\delta_{kl}$$

Los dos primeros términos corresponden a la deformación isótropa elástica

$$= \alpha\Delta T\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\,\mu\epsilon_{ij} - \left[\lambda\alpha\Delta T\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{kl} + \mu\left(\alpha\Delta T\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} + \alpha\Delta T\delta_{kl}\delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]$$

$$= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\,\mu\epsilon_{ij} - 3\,\lambda\alpha\Delta T\delta_{ij} - \mu\alpha\Delta T\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} - \mu\alpha\Delta T\delta_{kl}\delta_{il}\delta_{jk}$$

$$= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\,\mu\epsilon_{ij} - 3\,\lambda\alpha\Delta T\delta_{ij} - \mu\alpha\Delta T\delta_{ij} - \mu\alpha\Delta T\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda[\epsilon_{kk} - 3\,\alpha\Delta T]\delta_{ij} + 2\mu\left[\epsilon_{ij} - \alpha\Delta T\delta_{ij}\right]$$

Seguidamente se especifican algunos materiales y sus constantes elásticas

Constantes elásticas de cristales cúbicos			
Material	c_{11}GPa	c_{44}GPa	c_{12}GPa
Ag	124,0	46,1	93,4
Al	108,2	28,5	61,3
Au	186	42,0	157
Cu	168,4	75,4	121,4
Ni	246,5	124,7	147,3
Pb	49,5	14,9	42,3
Fe	228	116,5	132
Mo	46	110	176
Na	7,32	4,19	6,25
Nb	245,5	29,3	139
Ta	267	82,5	161
V	228	42,6	119
W	501	151,4	198
(diamante)	1076	575,8	125,0
Ge	128,9	67,1	48,3
Si	165,7	79,6	63,9
ClNa	48,7	12,6	12,4
LiF	111,2	62,8	42,0
MgO	289,2	154,6	88,0
TiC	500	175	113

cubo, $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66}$, $c_{12} = c_{23} = c_{13}$ Kelly and Groves2000

Constantes elásticas de cristales hexagonales a temperatura ambiente					
Material	c_{11}GPa	c_{33} GPa	c_{44}GPa	c_{12}GPa	c_{13} GPa
Be	292,3	336,4	162,5	26,70	14,00
Grafito	1160	46,6	2,3	290	109
Cd	115,8	51,4	20,4	39,8	40,6
Co	307	358,1	78,3	165	103
Hf	181,1	196,9	55,7	77,2	66,1
Mg	59,7	61,7	16,4	26,2	21,7
Re	612,5	682,7	162,5	270	206
Ti	162,4	180,7	46,7	92,0	69,0

Zn	161	61,0	38,3	34,2	50,1
ZnO	209,7	210,9	42,5	121,1	105,1
Zr	143,4	164,8	32,0	72,8	65,3

Los datos son a temperatura ambiente, los ejes son paralelos a las aristas.
Los ejes x_1 x_2 están en el plano basal mientras que x_3 es paralelo a la dirección [0001], $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$, $c_{13} = c_{23}$, $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

3

"Yo vi una Rueda altísima, que no estaba delante de mis ojos,
ni detrás, ni a los lados, sino en todas partes, a un tiempo.
Esa Rueda estaba hecha de agua, pero también de fuego,
y era (aunque se veía el borde) infinita."
La escritura de Dios - Jorge Luis Borges

Capítulo 3 - ONDAS EN 3D

3.1 Fuentes y tipos de ondas

Se llama frente de onda al lugar geométrico de los puntos que son alcanzados simultáneamente por una onda, son superficies que se expanden al transcurrir el tiempo, dicho de otro modo, son los puntos que comparten la misma fase en el mismo instante. Luego, el frente de onda son los puntos que hacen a la fase constante. Los frentes de onda pueden ser superficies o líneas.
Denominamos rayos a las líneas perpendiculares (no tienen por qué ser rectas) a los sucesivos frentes de ondas en cada punto (líneas rojas punteada en los esquemas siguientes), y físicamente representan las líneas a lo largo de las cuales se propaga la energía de la onda, (ver más adelante). La forma de los frentes de ondas induce una nueva clasificación.
Si la onda se propaga en una única dirección los frentes de onda serán planos paralelos y la llamamos ondas planas. Fig.3-1

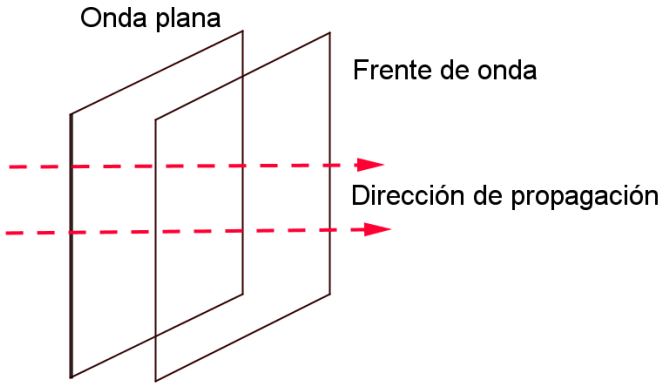


Fig. 3-1

Si la fuente emisora es un punto y la velocidad de propagación es la misma (isótropo) en todas las direcciones el frente de onda es esférico Fig.3-2.

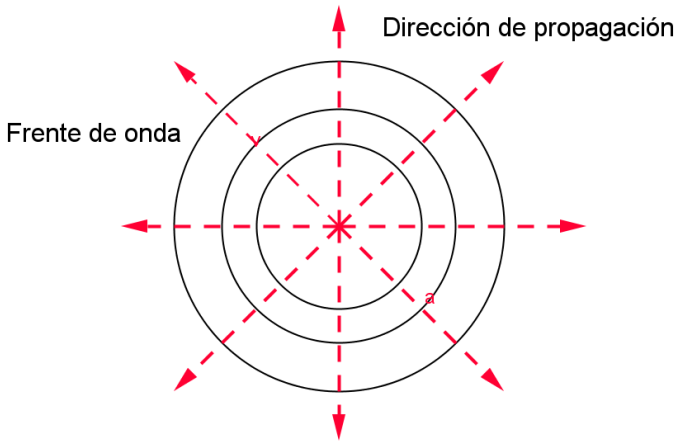


Fig. 3-2

En el caso de tener fuentes distribuidas a lo largo de una recta emitiendo en fase y en un medio isótropo, se generan ondas cilíndricas. Fig.3-3

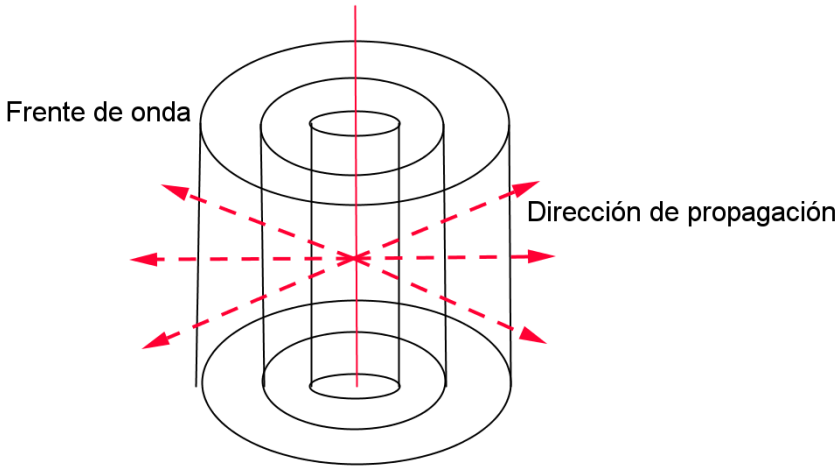


Fig. 3-3

3.2 Propagación de una onda plana en una dirección arbitraria

Una característica de la onda plana es la dirección en que se propaga, que indicaremos mediante el versor l_i

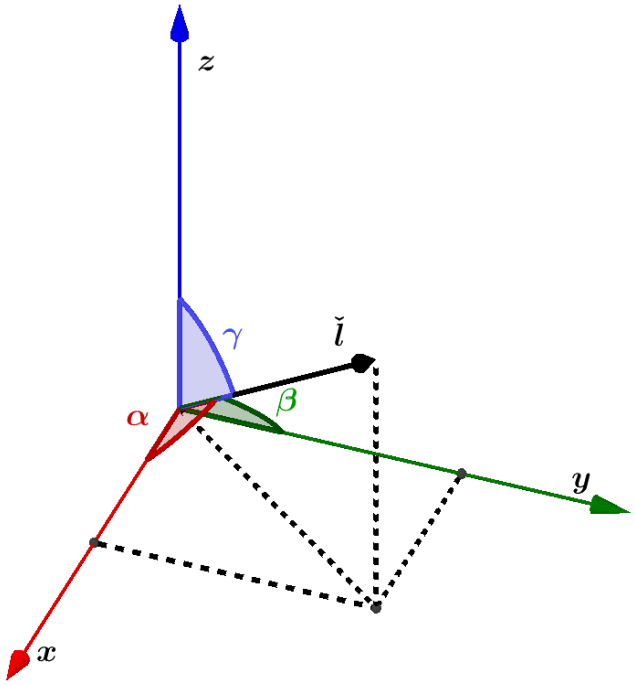


Fig. 3-4

El versor $l_i = (cos\alpha; cos\beta; cos\gamma)$ esta formado por los cosenos directores de los ángulos que dan la dirección de propagación de la onda, Fig. 3-4. Recordar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a 1.

Llamando r_i o (x_i) al vector posición de un punto cualquiera del medio en el cual se propaga la onda. El producto $\check{l}.\vec{r}$ será la distancia de dicho punto al origen medida en la dirección de propagación, luego la función de onda la podemos escribir como

$$\varphi = \varphi\left(t - \frac{\check{l}.\vec{r}}{c}\right)$$

Para una onda plana sinusoidal que se propaga en una dirección arbitraria indicada por l_i. La función de onda armónica será

$$\varphi = Asen(\omega t - k\check{l}.\vec{r})$$

O bien

$$\varphi = Asen(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Definiendo $\vec{k} = |\vec{k}|\check{l}$ donde $|\vec{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \frac{\omega}{c}$

Otra manera de escribir la función de onda armónica es de modo complejo, utilizando la representación exponencial, recordando que

$$\varphi = Asen(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) = Areal\left[e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\right]$$

Para satisfacer la ecuación de ondas sólo se requiere que el $|\check{l}| = 1$

La expresión general de una onda amónica en el espacio también puede escribirse como

$$\varphi_i = A_{0i}e^{i[k(l_n x_n) - \omega t]} = A\alpha_i e^{i[k(l_n x_n) - \omega t]}$$

El vector A_{0i} se lo llama vector polarización, pudiendo tener componentes imaginarias.

En el esquema de la Fig. 3-5 se observa un frente de onda plano propagándose en la dirección del eje de la equis. Mientras que en la Fig.3-6 también tenemos un frente de onda plano, pero se propaga en otra dirección.

La ecuación del frente de onda puede ser obtenido, de acuerdo con su definición, haciendo la fase constante

$$t - \frac{\check{l}.\vec{r}}{c} = t - \frac{l_i r_i}{c} = const$$

Tomando distintos valores de la constante para un mismo tiempo se obtienen diferentes frentes de ondas, por tanto

$$\frac{\check{l}.\vec{r}}{c} = -t.const$$

$$\check{l}.\vec{r} = x_1 cos\alpha + x_2 cos\beta + x_3 cos\gamma = \mathcal{W}(t)$$

Que es la ecuación vectorial del plano.

Ejercicio

Verificar que, si el argumento de una onda es una combinación lineal de las variables espaciales, es una onda plana.

Ejercicio

Si la función del frente de onda tiene la siguiente expresión $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 = 4$ ¿qué puede decir sobre el medio y la velocidad de la onda? ¿Dónde piensa que está ubicada la fuente? ¿La fuente emite de manera isótropa? ¿puede ser un medio no-homogéneo?

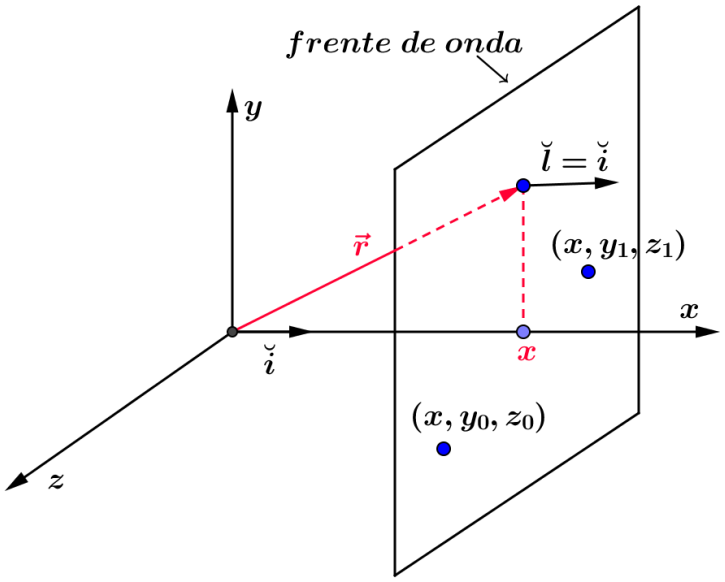


Fig. 3-5

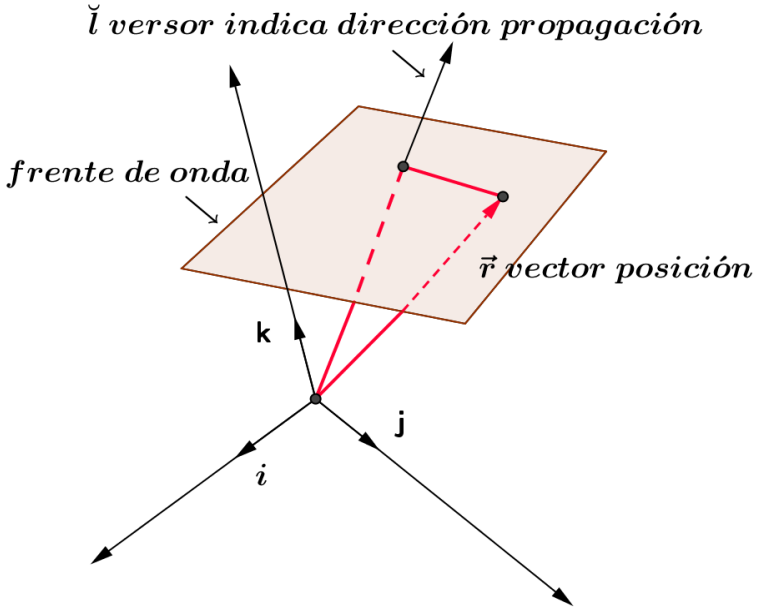


Fig. 3-6

En muchos casos reales los frentes de ondas no coinciden con la clasificación dada anteriormente, esto sucede cuando el medio en el cual se propagan las ondas no es homogéneo y/o isótropo.

Puesto que el frente de onda es el lugar geométrico de puntos puede ser expresada por una función de variables espaciales $f(x_i) = 0$ para un tiempo fijo, por ejemplo, para el caso de un frente de onda esférico $f(x_i) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$. En este caso se expande el frente al aumentar el radio con el tiempo.

Cuando la propagación es en el espacio con coordenadas cartesianas, la ecuación de ondas se escribe

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

O independiente del sistema de coordenadas elegido

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}$$

Válida para cualquier geometría del frente de onda

En coordenadas esféricas el Laplaciano es

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)+\frac{1}{r^2 Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[Sen\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r^2 Sen^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

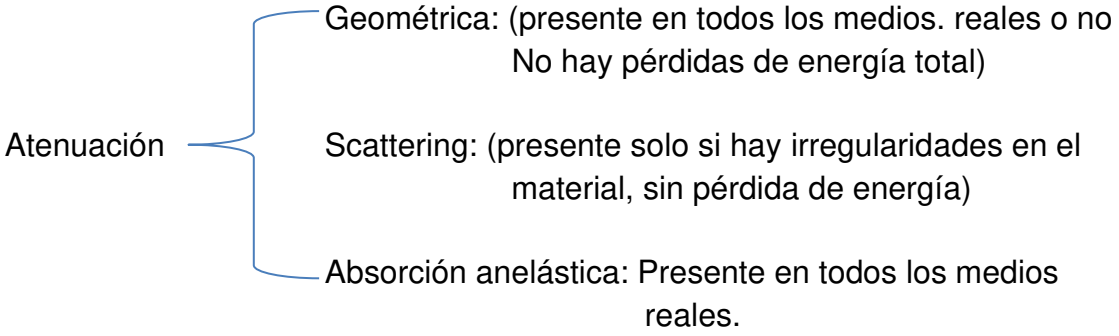
y en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3.3 Atenuación y Absorción

Se entiende por atenuación a la perdida de amplitud de la onda cuando se propagan en un medio. Los procesos que involucran la atenuación son complejos y múltiples dependiendo en principio del estado del medio (gas, liquido, solido),

aquí solo comentaremos el caso de los sólidos. Podemos clasificar la atenuación en tres tipos:


Atenuación
Geométrica: (presente en todos los medios. reales o no
No hay pérdidas de energía total)
Scattering: (presente solo si hay irregularidades en el
material, sin pérdida de energía)
Absorción anelástica: Presente en todos los medios
reales.

1. Geométrica: Es la perdida de energía por unidad de volumen (amplitud) que sufre el haz cuando por razones geométricas debe distribuirla en un volumen mayos por el solo hecho de propagarse. En estos casos no hay pérdidas "genuinas" de energía. Por ejemplo, Si una onda esférica se propaga en un medio por el solo hecho de expandirse el frente de onda, su amplitud disminuye en $\frac{1}{r}$, ya que una misma energía debe distribuirse en un área mayor. Algo similar sucede con las ondas de superficie donde el frente de onda es una circunferencia luego la amplitud disminuye como $\frac{1}{\sqrt{r}}$.
2. Scattering Es la desviación de la energía del haz, por razones de discontinuidades en el medio donde se propaga. Si el medio presenta irregularidades, por ejemplo: bordes de grano, inclusiones, precipitados, defectos puntuales, dislocaciones, etc. siempre habrá scattering, (dependiendo de la frecuencia de la onda y las dimensiones del objeto), dentro de este caso incluimos también la reflexión, refracción.
3. Absorción anelástica, (viscoelasticidad), comportamiento de los materiales que exhiben propiedades viscosas y elásticas. En este caso la energía de la onda se convierte en calor, esto es lo que llamamos atenuación genuina.

Las pérdidas por absorción dependen del material que atraviesa la onda y de la frecuencia de la misma, su evaluación puede proporcionar información acerca de las propiedades del medio donde se propaga la onda. Cualquier tipo de desviación de la regularidad en la estructura cristalina del sólido se considera como una imperfección que da lugar a absorción. Las imperfecciones pueden ser defectos puntuales, lineales y volumétricos. En algunos casos cambios en la densidad de un mismo medio es visto como una irregularidad, por ejemplo, zonas de distintas temperaturas en un fluido afectan la propagación de las ondas elásticas. En el caso del agua la onda se ve afectada por los cambios en la salinidad. En el aire la

aparición de burbujas o niebla modifican la propagación del sonido, (sirena para niebla).

La relación entre la longitud de onda λ y la dimensión de la inhomogeneidad a determina el tipo de comportamiento de la onda y puede ser esquematizado en los siguientes tres gráficos: Fig. 3.7, Fig.3.8, Fig. 3.9

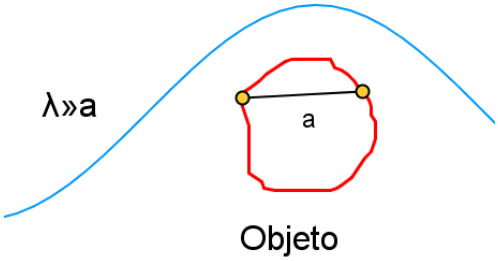


Fig. 3-7

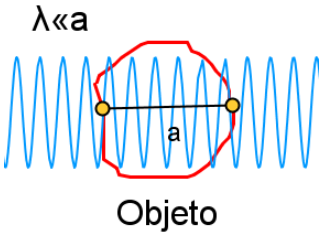


Fig. 3-8

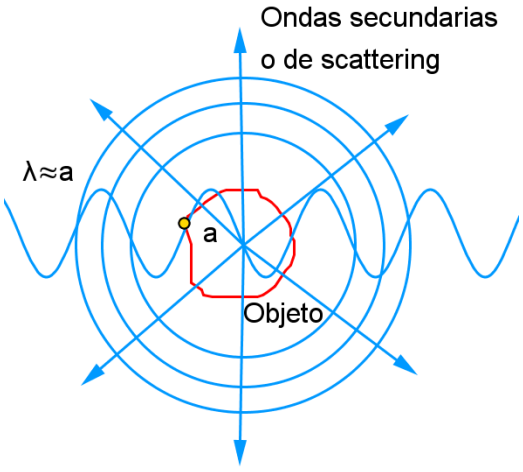


Fig. 3-9

1. Si $\lambda \gg a$ la onda se comporta como si no existiera obstáculo, "no ve" el objeto.
2. Si $\lambda \ll a$ El obstáculo se comporta como otro medio, luego existe una interfase de separación donde se produce reflexión o refracción.
3. Si $\lambda \approx a$ Es en este caso donde predomina el scattering generándose nuevas ondas.

Por supuesto que estos tres casos presentan zonas donde prevalece más de un fenómeno simultáneamente. Esta misma clasificación puede ser realizada en un metal pensando al obstáculo como el tamaño de grano.

Suponiendo ondas armónicas planas, podemos escribir la magnitud de la presión, o la tensión elástica, en algunos casos el desplazamiento, de la siguiente forma; Si representamos la amplitud del pulso $A(x) = A_0 e^{-\propto x}$, teniendo en cuenta que la onda se mueve a una velocidad determinada se puede expresar la amplitud en función del tiempo de propagación

$$A(t) = A_0 e^{-\propto ct}$$

Los procesos de absorción debido a la anelastícidad pueden ser representados por la expresión desarrollada. Es común usar un factor adimensional que se encuentra íntimamente relacionado con el coeficiente de absorción y que se llama factor de calidad Q, este se define como la relación entre la energía perdida en un ciclo ΔE y la energía de ese ciclo E ,

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta E}{E}$$

Luego si

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\Delta E}{T} = \nu \Delta E \quad \therefore \quad \Delta E = \frac{1}{\nu}\frac{dE}{dt}$$

Por tanto

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{2\pi\nu E}\frac{dE}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dE}{E} = 2\pi\nu Q^{-1} dt$$

Integrando

$$\int_{E_0}^{E} \frac{dE}{E} = \int_0^t 2\pi\nu Q^{-1} dt$$

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{2\pi\nu t}{Q}}$$

Para un medio lineal la energía de la perturbación es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda, comparando,

$$A(t) = A_0 e^{-\propto ct} \quad \text{y} \quad E(t) = E_0 e^{-\frac{2\pi\nu t}{Q}}$$

Se llega a

$$Q^{-1} = \frac{\alpha\lambda}{\pi}$$

Por tanto, el coeficiente α es proporcional Q^{-1}, si α es grande o Q pequeño nos dice que la transformación de energía es importante.

Una onda que llega a un detector se la puede considerar en un principio, compuesta de la onda directa (que viaja directamente de la fuente al detector y ha sufrido absorción) y ondas secundarias que además de la inevitable absorción han sufrido desviación de su trayectoria, en algunos casos particulares las ondas secundarias son llamadas ondas de scattering.

Si suponemos que el material es aluminio que tiene un coeficiente de atenuación de $\alpha = 0{,}40 N_p m^{-1}$ a $10\ MHz$ para ondas primarias con velocidad $c_p = 6374 \frac{m}{s}$ a $20C^0$. Vemos que $Q^{-1} = 8{,}11\ .10^{-4}$ y si graficamos $\frac{A}{A_0}$ vemos que a $4m$ tememos un 20% del valor inicial. Fig. 3.10

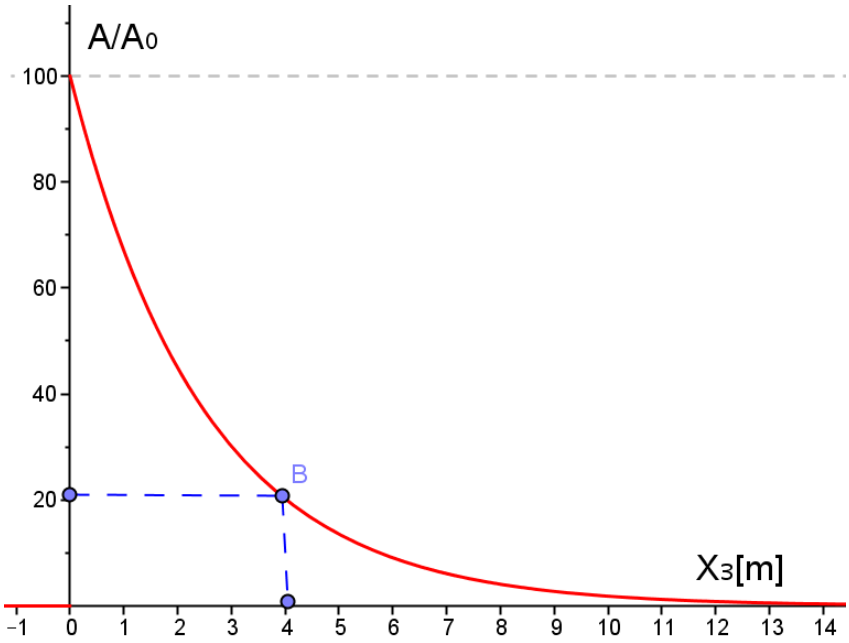


Fig. 3.10

3.4 Propagación de Ondas Elásticas en medios elástico, infinito, isótropo y homogéneo

Veremos en primer lugar la propagación de ondas en un medio elástico, infinito, isótropo y homogéneo. La 2ª ley de Newton para un medio continuo se puede escribir, de acuerdo con Euler, para un cuerpo constituido por un dominio de volumen *V* con su frontera *S*:

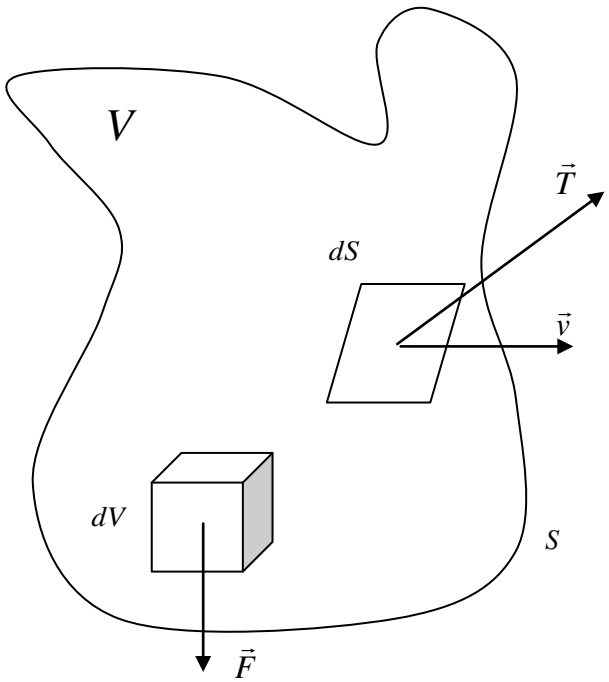


Fig. 3.11

$$\int_V F_i \cdot dV + \int_S T_i \cdot dS = \frac{d}{dt}\int_V \rho \cdot v_i \cdot dV$$

Donde $F_i = (F_1, F_2, F_3)$ es las fuerzas por unidad de volumen, llamadas fuerzas de volumen y representan las fuerzas generadas en fuentes externas al medio elástico, por ejemplo: fuerzas magnéticas, eléctricos, gravitatorias centrifugas, etc. T_i es una fuerza por unidad de

superficie, vector de esfuerzos o una fuerza de contacto. Fig. 3.11

Sobre cada elemento de superficie actúan las tensiones T_i y sobre el elemento de volumen la fuerza F_i.

De acuerdo a la expresión de Cauchy, siendo n_i el versor normal a la superficie tenemos:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

Por lo tanto,

$$\int_V F_i \cdot dV + \int_S \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot v_i \cdot dV$$

Aplicando Gauss,

$$\int_V F_i \cdot dV + \int_V \sigma_{ij,j} \cdot dV = \int_V \rho \cdot \frac{dv_i}{dt} \cdot dV$$

Por tanto:

$$\int_V \left(F_i + \frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} \right) \cdot dV = \int_V \rho \cdot \frac{dv_i}{dt} \cdot dV$$

Para llegar finalmente a

$$F_i + \frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = \rho \cdot \frac{dv_i}{dt}$$ 2ª ley de Newton para un medio continúo**.**

Si queremos expresar esta ecuación en términos de los desplazamientos u_i se debe conocer primero la relación entre esfuerzos σ_{ij} y la deformación

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Para un medio lineal elástico tenemos la ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Donde C_{ijkl} es un tensor de 4° rango $3^4 = 81$, el cual debido a la simetría de σ_{ij} y ε_{kl} tiene 21 elementos distintos.

De éstos, si el medio es isótropo sólo dos son independientes y la relación se reduce a:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}$$

Donde λ y μ son los coeficientes de Lamé, que para el caso en que el medio es homogéneo son constantes.

Remplazando ε_{ij} en σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \cdot \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,k}$$

Ésta es la expresión de la ley de Hooke para un medio isótropo, homogéneo. Remplazando en la 2ª ley de Newton, y suponiendo que no hay fuerzas de volumen $F_i = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \mu \cdot \left(u_{i,jj} + u_{j,ij} \right) + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,kj} \\ &= \mu \cdot \left(u_{i,jj} + u_{j,ji} \right) + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot u_{k,kj} \\ &= \mu \cdot \left(u_{ii,jj} + u_{j,ji} \right) + \lambda \cdot u_{k,ki} \\ &= \mu \cdot \left(u_{i,jj} + u_{k,ki} \right) + \lambda \cdot u_{k,ki} \end{aligned}$$

$$= \mu \cdot u_{i,jj} + \left(\mu + \lambda \right) \cdot u_{k,ki} = \rho \frac{dv_i}{dt} \qquad (1)$$

Recordando que

$$u_{k,k} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \vec{\nabla}.\vec{u} = div\,\vec{u}$$

y

$$\nabla^2 u_i = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}u_i = \vec{\nabla}.(grad\ u_i) = \vec{\nabla}.\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial u_i}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = u_{i,jj}$$

En coordenadas cartesianas ortogonales, las componentes del Laplaciano de un vector son los Laplaciano de las componentes del mismo:

Luego, remplazando en (1) queda:

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\mu + \lambda)\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right) = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Llamada ecuación vectorial de Navier. Usando la identidad vectorial siguiente

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)$$

Recordando que el cambio volumétrico del material es

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \varepsilon_{ii} = tr(\varepsilon) = \theta$$

y el vector rotación es

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

Remplazando en la ecuación de Navier

$$(\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\theta) - 2\mu\vec{\nabla}\times\vec{\omega} = \rho\ddot{\vec{u}}$$

Esta expresión nos indica que en el caso más general la perturbación que se propaga está asociada a un cambio de volumen y a un corte representado por $\vec{\omega}$.

Con el objeto de separar esto dos comportamientos aplicamos la descomposición de Helmholtz. a la ecuación de Navier.

Como todo campo vectorial que cumpla determinadas condiciones se lo puede descomponer en dos, uno solenoidal y otro irrotacional, el campo $\vec{u}$ se lo puede pensar como (descomposición de Helmholtz):

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$$

Luego, $\vec{\nabla}\varphi$ es un campo de gradientes y φ es una función escalar, por lo tanto

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$ entonces el campo de gradientes es irrotacional. Similarmente,

$\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$ es un campo de rotores y $\vec{\Psi}$ es un potencial vectorial, entonces, el campo de rotores es solenoidal. $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) = 0$ Luego, reemplazando

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\mu + \lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{u}) = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\mu\nabla^2[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}] + (\mu + \lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}]) = \rho\frac{d^2}{dt^2}[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}]$$

como el Laplaciano de un vector es $\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

El primer sumando de $\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}]) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}]) =$

$$\mu\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})\right) - \mu\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})\right) =$$

$$\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) - \mu\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})\right)$$

Yaqué $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}) = 0$ y $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$

El otro sumando queda:

$$(\mu + \lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}])$$

$$(\mu + \lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}]) = (\mu + \lambda)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{\Psi})\right) = (\mu + \lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi)$$

Luego, sumando el primer miembro

$$\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) - \mu\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi})\right) + (\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) = \rho\frac{d^2}{dt^2}[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{\Psi}]$$

$$\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) - \mu\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi})\right) + \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) + \lambda\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) = \rho\frac{d^2}{dt^2}[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{\Psi}]$$

$$(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) - \mu\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi})\right) = \rho\frac{d^2}{dt^2}[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\times\vec{\Psi}]$$

$$(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi) - \rho\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\nabla}\varphi) - \mu\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi})\right) - \rho\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\left[(\lambda+2\mu)\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi - \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] - \vec{\nabla}\times\left[\mu\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Psi}) + \rho\frac{d^2\vec{\Psi}}{dt^2}\right] = 0$$

$$\vec{\nabla}\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] - \vec{\nabla}\times\left[\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\Psi}) - \mu\nabla^2\vec{\Psi} + \rho\frac{d^2\vec{\Psi}}{dt^2}\right] = 0$$

$$\vec{\nabla}\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] - \mu\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{\Psi})\right) - \vec{\nabla}\times\left[-\mu\nabla^2\vec{\Psi} + \rho\frac{d^2\vec{\Psi}}{dt^2}\right] = 0$$

Como el rotor de la divergencia es cero, se cumple la igualdad cuando se satisface

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \;\; y \;\; \mu\nabla^2\vec{\Psi} - \rho\frac{d^2\vec{\Psi}}{dt^2} = 0$$

O bien $\nabla^2\varphi - \frac{\rho}{(\lambda+2\mu)}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ que es una ecuación de onda escalar

$\nabla^2\vec{\Psi} - \frac{\rho}{\mu}\frac{d^2\vec{\Psi}}{dt^2} = 0$ ecuación de onda vectorial

Recordemos que $\nabla^2\vec{\Psi} = \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial z}$

Éstas son dos ecuaciones de onda; las cantidades.

$$c_P^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \qquad \text{y} \qquad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

las constantes que aparecen en ellas son las velocidades de propagación. La perturbación consiste en dos tipos de ondas que se propagan independientemente en un medio isótropo, homogéneo e infinito.

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c_P^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla^2\vec{\Psi} - \frac{1}{c_S^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2} = 0$$

El primer tipo de onda se conoce como: *onda de dilatación*, *onda longitudinal*, *onda irrotacional* u *onda P*, este último nombre se debe al hecho de que usualmente este tipo de onda llega primero, por tener una velocidad mayor. El segundo tipo se denomina, *onda de corte*, *onda transversal*, *onda rotacional* u *onda S*.

Preguntas

Observe detalladamente la deducción de la ecuación de ondas realizada anteriormente y responda:

1. ¿Se supuso en alguna parte de la deducción que la densidad del medio es contante?
2. ¿Supusimos que el volumen de integración es fijo?
3. ¿En qué etapa de la deducción se supone que los desplazamientos son pequeños?
4. ¿Por qué supusimos que no hay fuerzas de volumen?
5. ¿Esta deducción incluye a los fluidos?
6. ¿Qué condiciones deben cumplirse para aplicar la descomposición de Helmholtz?

Notemos que con solo conocer los coeficientes de Lamé del material podemos determinar la velocidad de propagación de las ondas elásticas en ese medio, (recordar que el medio es infinito). Es de mucha utilidad el planteo inverso, conociendo las velocidades podemos determinar los coeficientes de Lamé y con ellos caracterizar el material.

Comparemos las velocidades de ambas ondas.

$$\frac{c_P^2}{c_S^2} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} > 0$$

Lo cual indica que $c_P > c_s$.Remplazando λ y μ por una expresión en la que aparezca la relación de Poisson

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Operando se llega

$$\frac{c_P^2}{c_S^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{1-\nu}$$

a medida que ν decrece de 0,5 a cero, $\frac{c_P^2}{c_S^2}$ aumenta de cero a su máximo valor. Algunos materiales tienen $\lambda = \mu$, en ese caso $\nu = 0{,}25$ y $\frac{c_P}{c_S} \approx \sqrt{3} = 1{,}717$ estos materiales son llamados Poissonianos. Fig.3.12

La velocidad de la *onda S* va de cero hasta el 70% de la velocidad de la P. Para fluidos, μ es cero y por tanto c_S también es cero; por eso, las *ondas S* no se propagan en los fluidos.

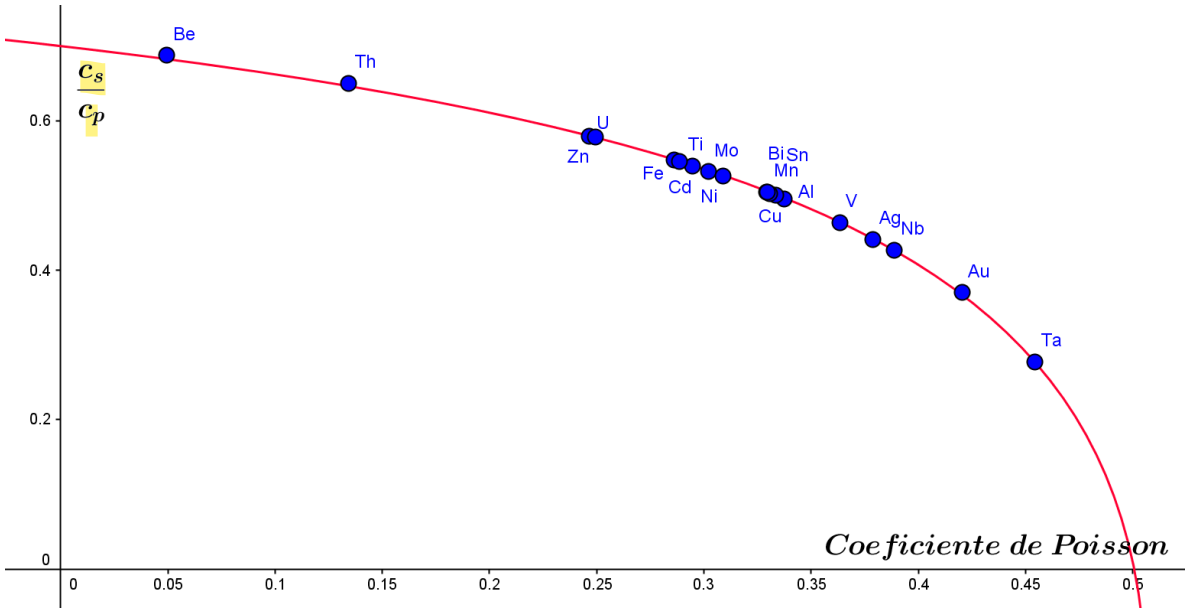


Fig. 3.12

También aquí conociendo las velocidades es posible determinar el coeficiente de Poisson, despejando de la expresión anterior, nos queda

$$\nu = \frac{c_P - 2c_S}{2(c_P - c_S)}$$

3.5 Propagación de una onda en un medio con simetría esférica

Si la propagación es isótropa φ será solo dependiente del tiempo y la posición, luego el Laplaciano queda

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

Como la cantidad $r\varphi$ verifica la ecuación de onda de una dimensión. Por lo tanto, existen soluciones de la forma

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r}f(r-ct) + \frac{1}{r}g(r+ct)$$

Observemos que a diferencia de lo que ocurre con una onda plana no amortiguada, en las ondas esféricas la amplitud disminuye con la inversa del radio, cuando se expande. Cada término puede ser interpretado como una onda esférica que se expande o contrae a velocidad c.Tales ondas solo existe en espacios de dimensión impar. ¿Por qué?, afortunadamente vivimos en uno de dimensión tres de manera que podemos comunicarnos con ondas elásticas y electromagnéticas.
Luego la solución general es

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{2}[\xi(r-ct) + \xi(r+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}\psi(r)dr$$

Con condiciones iniciales

$$\varphi(r,0) = \xi(r) \text{ y } \dot{\varphi}(r,t)|_{t=0} = \psi(r)$$

Si suponemos que $\varphi(r,t)$ es la función escalar de la descomposición de Helmholtz, el desplazamiento en este caso es

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}[f(r-ct) + g(r+ct)] - \frac{1}{r}\left[\grave{f}(r-ct) + \grave{g}(r+ct)\right]$$

Cada uno de estos términos decae con la distancia al origen como r^{-1} y r^{-2} llamados campo lejano y campo cercano respectivamente.

3.6 Expresión de las tensiones en función de los potenciales.

Recordando que la solución completa para el desplazamiento en un medio esta dada por

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} = \vec{u}_P + \vec{u}_S$$

Donde el movimiento de las partículas de una onda-P estará dado por el $\vec{\nabla}\varphi$, y el movimiento de las partículas de onda-S estará dado por $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$.

Luego realizando las operaciones indicadas

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3}$$

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}$$

Recordando que

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \delta_{ij}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

Que es la ley de Hooke para un medio homogéneo isótropo. Desarrollando en componentes

$$\sigma_{11} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{11} = 2\,\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{22} = 2\,\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{33} = 2\,\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

En más de una oportunidad consideráremos interfaces horizontales es decir perpendiculares al eje x_3. Luego el tensor de tensiones que actúa sobre ese plano, generalmente supuesto libre. Tendrá las siguientes componentes

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

$$2\,\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

También es útil hallar las componentes del tensor de tensiones en función de los potenciales. Remplazando los desplazamientos en función de los potenciales

$$\sigma_{11} = 2\,\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

Como

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3}$$

$$\sigma_{11} = 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\right)\right] + \lambda\nabla^2\varphi$$

Procediendo de igual manera se llega

$$\sigma_{22} = 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1}\right)\right] + \lambda\nabla^2\varphi$$

$$\sigma_{33} = 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\right)\right] + \lambda\nabla^2\varphi$$

Las componentes no diagonales dan

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\right)\right]$$

3.7 Otras formas de escribir la ecuación de onda

Anteriormente se llegó a la siguiente ecuación de onda

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda)u_{k,ki} = \rho\dot{v}_i$$

Para un medio isótropo, homogéneo, infinito, sin fuerzas de volumen y cumpliendo con la ley de Hooke. También vimos que las velocidades de las ondas en volumen son

$$c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Luego despejando las constantes de Lamé podemos escribir

$$c_s^2 u_{i,jj} + \left(c_p^2 - c_s^2\right)u_{k,ki} = \rho\dot{v}_i$$

La ecuación de onda en función de las velocidades en el medio. También puede escribirse como

$$c_s^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(c_p^2 - c_s^2\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} = \rho \dot{v}_i$$

3.8 Energía de las ondas elásticas

La energía elástica de un medio deformable es la suma de la energía cinética más la energía potencial

$$E = \int Ec \, dV + \int Ep \, dV$$

Donde Ec es la densidad de energía cinética $= \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i^2$ y Ep es la densidad de energía potencial $= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}$

Calculemos ahora el cambio en el tiempo de la energía en un determinado volumen fijo

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial Ec}{\partial t} dV + \int \frac{\partial Ep}{\partial t} dV$$

Comencemos por la primera integral

$$\frac{\partial Ec}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \dot{u}_i^2\right) = \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i$$

La segunda integral da

$$\frac{\partial Ep}{\partial t} = \frac{\partial Ep}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\dot{u}_{i,j} + \sigma_{ij}\dot{u}_{j,i}\right)$$

Cambiando i por j en uno de los sumandos $\sigma_{ij}\dot{u}_{j,i} = \sigma_{ji}\dot{u}_{i,j}$ y como σ_{ij} es simétrico, luego

$$\frac{\partial Ep}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\dot{u}_{i,j} + \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j}\right) = \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j}$$

De esta manera se obtuvo

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial Ec}{\partial t} dV + \int \frac{\partial Ep}{\partial t} dV = \int \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i \, dV + \int \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j} \, dV$$

Trabajemos un poco más esta expresión, para ello tengamos en cuenta la distribución de la derivada

$$\left(\sigma_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j} = \sigma_{ij,j}\dot{u}_i + \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j}$$

$$\left(\sigma_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j} - \sigma_{ij,j}\dot{u}_i = \frac{\partial Ep}{\partial t}$$

Remplazando en

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial Ec}{\partial t} dV + \int \frac{\partial Ep}{\partial t} dV = \int \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i \, dV + \int \left(\left(\sigma_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j} - \sigma_{ij,j}\dot{u}_i\right) dV$$

Agrupando términos

$$\int \left(\rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j}\right) \dot{u}_i dV + \int \left(\sigma_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j} dV$$

En ningún paso de la deducción se utilizó el hecho de trabajar con ondas elásticas. Si observamos la primera integral vemos que el integrando es la ecuación de ondas, por lo tanto, es cero, quedando

$$\frac{dE}{dt} = \int \left(\sigma_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j} dV$$

Esta integral la podemos pasar a una de superficie sobre ζ que engloba al volumen V usando el teorema de Gauss

$$\iiint \vec{\nabla}.\vec{v} \; dV = \iint \vec{v}.\vec{n} \, dS$$

Luego en nuestro caso queda

$$\frac{dE}{dt} = \int \sigma_{ij}\dot{u}_i n_j \, dS$$

La expresión se puede interpretar diciendo que el cambio de la energía en el interior del volumen V, $\frac{dE}{dt}$ se debe al vector densidad de flujo de energía Φ_j que fluye a través de la superficie τ, Fig.3.13

$$\Phi_j = -\sigma_{ij}\dot{u}_i$$

$$\frac{dE}{dt} + \int \Phi_j n_j \, dS = 0$$

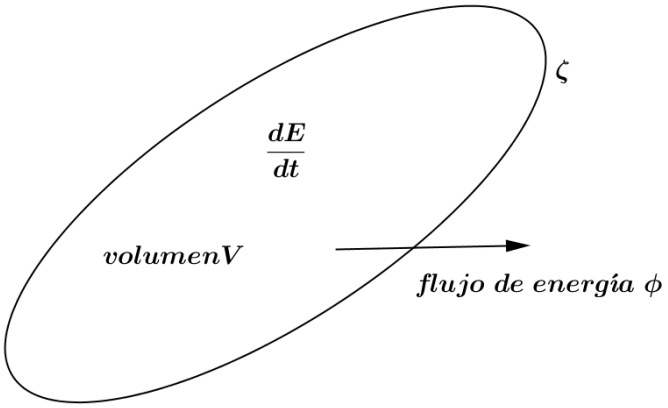


Fig.3.13

3.9 Energía en ondas armónicas

Supongamos ahora que estamos trabajando con una onda armónica

$$u_i = A\alpha_i e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

¡Atención! subíndices y unidad imaginaria no confundir. Calculamos la densidad de energía cinética

$$\dot{u}_i = -A\alpha_i i\omega e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]} =$$

Luego

$$E_c = \frac{1}{2}\rho\dot{u}^2 = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

Calculemos la densidad de energía potencial

$$E_p = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}$$

Recordando que

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Trabajando solo los paréntesis

$$\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=u_{k,l}u_{i,j}+u_{k,l}u_{j,i}+u_{l,k}u_{i,j}+u_{l,k}u_{j,i}=$$

$$=2u_{k,l}u_{i,j}+2u_{l,k}u_{i,j}=4u_{k,l}u_{i,j}$$

$$E_p=\frac{1}{2}C_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}$$

Para continuar debemos hacer las derivadas de u respecto de las coordenadas espaciales, para facilitar la operación cambio el subíndice del versor l de la exponencial, quedando

$$u_i=A\alpha_i e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Luego. (¡Atención!! con los subíndices).

$$u_{i,j}=A\alpha_i\left(ikl_n\delta_{nj}\right)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}=A\alpha_i\left(ikl_j\right)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

$$u_{k,l}=A\alpha_k(ikl_n\delta_{nl})e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}=A\alpha_k(ikl_l)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Reemplazando

$$E_p=\frac{1}{2}C_{ijkl}u_{k,l}u_{i,j}=\frac{1}{2}C_{ijkl}\,A\alpha_k(ikl_l)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}A\alpha_i\left(ikl_j\right)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}=$$

$$E_p=-\frac{1}{2}C_{ijkl}A^2k^2\alpha_k\alpha_i l_l l_j e^{2i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Veamos como son la energía potencial y cinética en el caso de una onda armónica para ello partamos de la ecuación de ondas

$$\sigma_{ij,j}=\rho\ddot{u}_i$$

Luego reemplazando la función de ondas armónicas en la ecuación de ondas, para lo cual debemos hacer las derivadas correspondientes.

$$u_i=A\alpha_i e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

$$\dot{u}_i=-A\alpha_i i\omega e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

$$\rho\ddot{u}_i=-\rho A\alpha_i\omega^2 e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

Que es el segundo miembro de la ecuación. Pasemos a calcular el primer miembro

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\epsilon_{kl}=C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)$$

$$\sigma_{ij,j}=C_{ijkl}\epsilon_{kl,j}=C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,lj}+u_{l,kj}\right)$$

$$u_{k,l} = A\alpha_k(ik\delta_{il}l_i)e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

$$u_{k,lj} = A\alpha_k(ik\delta_{il}l_i)\left(ik\delta_{ij}l_i\right)e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]} = A\alpha_k(ikl_l)\left(ikl_j\right)e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Mientras que la otra derivada será

$$u_{l,kj} = A\alpha_l(ik\delta_{ik}l_i)\left(ik\delta_{ij}l_i\right)e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]} = A\alpha_k(ikl_k)\left(ikl_j\right)e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Reemplazando en

$$\sigma_{ij,j} = C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,lj} + u_{l,kj}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}C_{ijkl}A\alpha_k k^2 l_l l_j - \frac{1}{2}C_{ijkl}A\alpha_l k^2 l_k l_j\right]e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Cambiando l por k y teniendo en cuenta la simetría del tensor de las constantes elásticas se arriba

$$-C_{ijkl}A\alpha_k k^2 l_l l_j e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]} = -\rho A\alpha_i\omega^2 e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Multiplicando esta expresión por $-\frac{u_i}{2}$

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}\alpha_k k^2 A^2 l_l l_j A\alpha_i e^{2i[k(l_ix_i)-\omega t]} = \rho A^2\alpha_i\alpha_i\omega^2 e^{2i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Luego la energía cinética y potencial es iguales en una onda armónica

$$E = 2\int E_C dV = 2\int E_P dV = -\int A^2\omega^2\,\rho e^{2i[k(l_ix_i)-\omega t]}dV$$

Vemos que la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y a la frecuencia al cuadrado y que varía con el tiempo.

Para obtener mayor información del proceso es conveniente trabajar con el vector flujo de energía, como se vio es

$$\Phi_i = -\sigma_{ij}\dot{u}_j$$

Obsérvese que el flujo de energía tiene dimensión de potencia por unidad de área. Remplazando

$$\Phi_i = -C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\dot{u}_j = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}A\alpha_j\omega i e^{i[k(l_ix_i)-\omega t]}$$

Como

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$$

$$\Phi_i = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}A\alpha_j\omega i e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]} = C_{ijkl}A\alpha_j\omega i\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

$$A\alpha_j\omega i\frac{1}{2}\left[C_{ijkl}u_{k,l}+C_{ijkl}u_{l,k}\right]e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

Cambiando en el segundo sumando k por l y teniendo en cuenta $C_{ijkl} = C_{ijlk}$

$$\Phi_i = A\alpha_j\omega i\left[C_{ijkl}u_{k,l}\right]e^{i[k(l_i x_i)-\omega t]} =$$

$$= -A^2\omega C_{ijkl}kl_l\alpha_j\alpha_k e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

3.10 El versor ĭ, dirección de propagación de la onda, imaginario

La amplitud de la onda puede o no ser compleja, el tiempo y la posición deben ser reales, nada podemos decir respecto al número de onda, veamos el caso en que el vector que determina la dirección de propagación de la onda es imaginario. Si $\check{l}$ es complejo lo podemos escribir

$$\check{l} = \check{l}` + i\check{l}``$$

Si debemos requerir que $\check{l}.\check{l} = 1$ lo cual impone determinadas condiciones sobre las componentes real e imaginaria.

$$\left(\check{l}` + i\check{l}``\right)\left(\check{l}` + i\check{l}``\right) = \check{l}`\check{l}` + i\check{l}``\check{l}` + i\check{l}``\check{l}` - \check{l}``\check{l}`` = 1$$

$$\check{l}`\check{l}` - \check{l}``\check{l}`` = 1 \text{ y } 2\check{l}``\check{l}` = 0$$

Reemplazando en la función de onda

$$\varphi_i = A_{0i}e^{i(kl_n x_n-\omega t)} = A_{0i}e^{i[k(l_n'+il_n'')x_n-\omega t]} = A_{0i}e^{-kl_n'' x_n}e^{i[kl_n' x_n-\omega t]}$$

Que es una onda que viaja en la dirección $\check{l}`$ y varia su amplitud al propagarse

Los planos en los cuales la amplitud es constante son $l_n'' x_n = C_1$, (ecuación vectorial del plano) y los planos para los cuales, a un dato tiempo tienen fase constante son $l_n' x_n = C_2$, con C_1 y C_2 constantes. Es fácil comprobar que el plano de amplitud constante es perpendicular al plano de fase constante, ya que $\check{l}``\check{l}` = 0$, Fig. 3.14

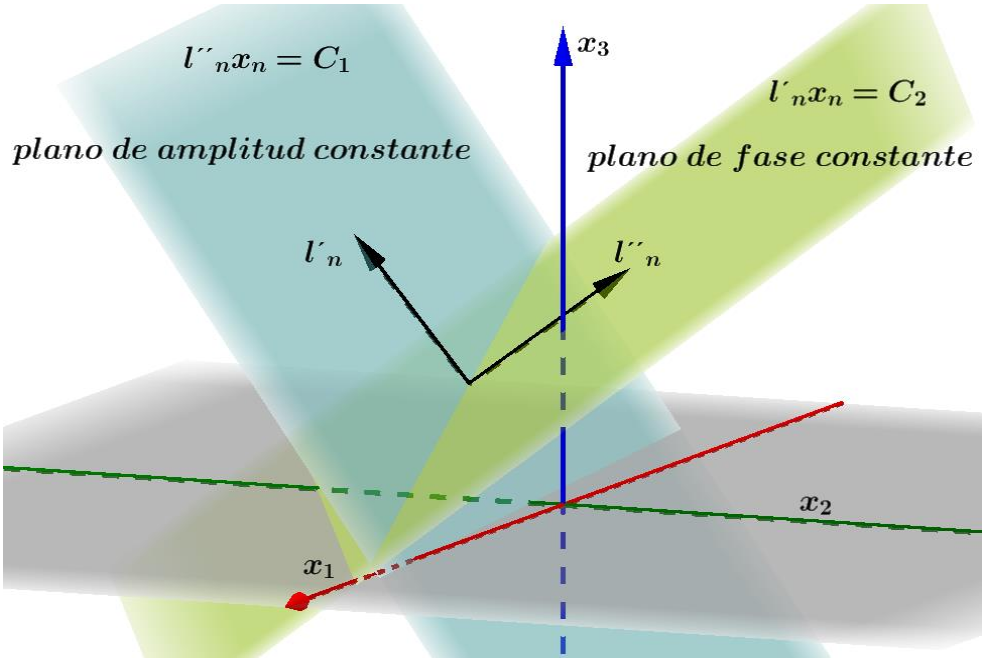


Fig.314

3.11 Gráficos de Lentitud

Partimos de la función de onda y modificamos un poco si expresión

$$\varphi_i = A_{0i} e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} = A\alpha_i e^{i[\frac{\omega}{c}(l_n x_n)-\omega t]} = A\alpha_i e^{i\omega[\frac{1}{c}(l_n x_n)-t]}$$

Llamando lentitud a la inversa de la velocidad $m = \frac{1}{c}$ o bien $m_n = \frac{1}{c} l_n$

$$= A\alpha_i e^{i\omega[m(l_n x_n)-t]} = A\alpha_i e^{i\omega[(m_n x_n)-t]}$$

Vemos, también que

$$m_n m_n = \frac{1}{c^2} l_n l_n = \frac{1}{c^2} \quad \therefore \quad m^2 = \frac{1}{c^2} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Por supuesto que esta definición es válida para los distintos tipos de velocidades, transversales y longitudinales.
Trabajemos ahora en el plano $l_3 = 0$, luego, si m_1 es real

$$m_2^2 = m^2 - m_1^2$$

Según sea m_1 mayor o menor que m tenemos dos posibles interpretaciones:

$$m_2 = \sqrt{m^2 - m_1^2}$$

O bien

$$m_2 = i\sqrt{m_1^2 - m^2} = i\beta \quad \text{si} \quad m_1 > m$$

Las soluciones correspondientes serán

$$\varphi_i = A\alpha_i e^{i\omega[(m_n x_n) - t]} = A\alpha_i e^{i\omega[(m_1 x_1 + m_2 x_2) - t]}$$

Onda que se propaga en una determinada dirección, mientras que la otra será

$$\varphi_i = A\alpha_i e^{i\omega[(m_1 x_1 + m_2 x_2) - t]} = A\alpha_i e^{i\omega[(m_1 x_1 + i\beta x_2) - t]} = A\alpha_i e^{-i\beta\omega x_2} e^{i\omega[(m_1 x_1) - t]}$$

Una onda que se propaga en la dirección x_1 y su amplitud decrece en dirección de x_2 (onda evanescente). Podemos ver que las relaciones

$$m_2 = \sqrt{m^2 - m_1^2} \quad \Rightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 = m^2 \quad \text{circunferencia fig. 3.15}$$

y

$$m_2 = i\sqrt{m_1^2 - m^2} = i\beta \quad \Rightarrow \frac{m_2}{i} = \beta$$

y

$$\sqrt{m_1^2 - m^2} = \beta \quad \Rightarrow \quad m_1^2 - \beta^2 = m^2 \quad \text{hipérbola equilátera}$$

Pueden ser interpretadas geométricamente como diagrama de lentitud, siendo de utilidad su aplicación. La primera de ellas es la ecuación de un círculo mientras que la segunda representa una hipérbola equilátera, en un sistema de ejes $(m_1;\, m_2)$

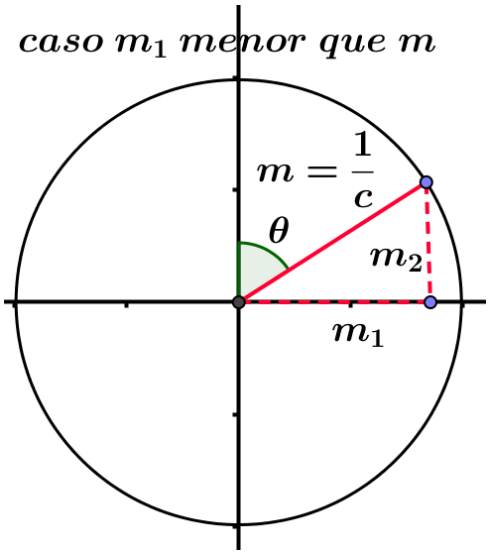


Fig.3.15

Este primer grafico de lentitud corresponde al caso en que $m_1 < m$, se observa en él, que al aumentar el ángulo θ crece el valor de m_1 acercándose a m, cuando lo sobrepasa, estamos en el caso hiperbólico.
La ecuación paramétrica del circulo es

$$m_1 = m \sin\theta \quad \text{y} \quad m_2 = m \cos\theta$$

Mientras que la ecuación paramétrica de la hipérbola equilátera es

$$m_1 = m \operatorname{ch}\gamma \quad \text{y} \quad m_2 = m \operatorname{sh}\gamma$$

En el diagrama Fig. 3.16 se observa la circunferencia y la hipérbola equilátera correspondiente según el caso. Estos gráficos son llamados de Crandall. Estos gráficos ayudan a visualizar el comportamiento de las ondas elásticas especialmente en el caso de la reflexión y refracción.

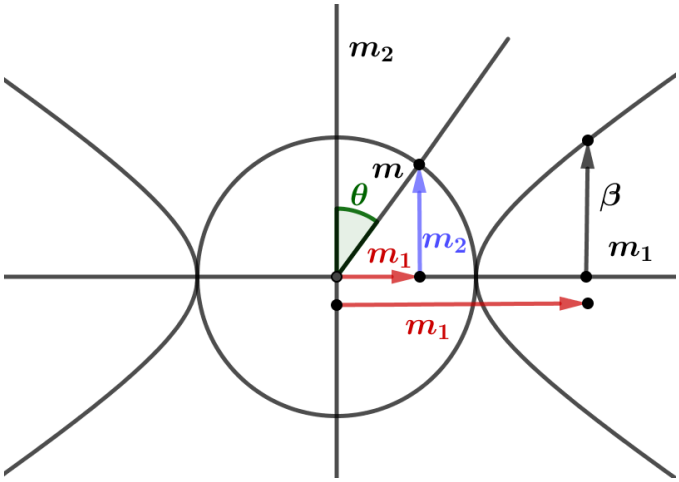


Fig3. 16

Ejercicio

Analicemos la onda asociada al siguiente versor con componentes complejas

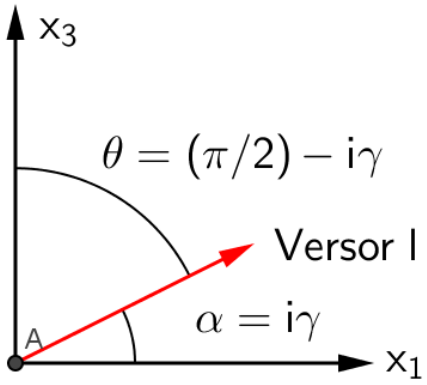


Fig. 3.17

Como ya vimos, no nos debe preocupar que tenga componentes imaginarias, solo se debe cumplir que sea versor. Los cosenos directores son:

$$cos\,\alpha = cos\,i\gamma = ch\,\gamma$$
$$cos\,\beta = 0$$
$$cos\,\theta = cos\left(\frac{\pi}{2} - i\gamma\right) = sin(i\gamma) = ish\gamma$$

Veamos que es un versor

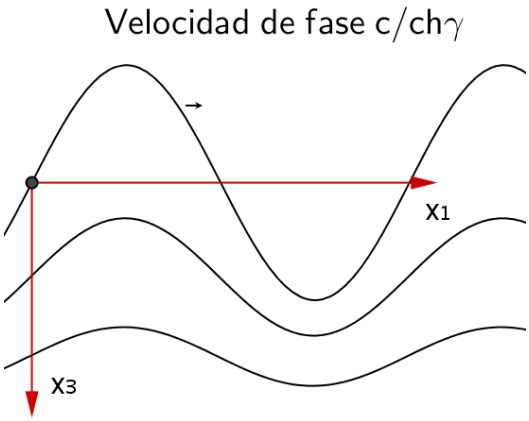
$$\left|\check{l}\right| = \sqrt{ch^2\gamma + (ish\gamma)^2} = 1$$

Luego

$$\varphi = A_0\, exp\, i\left(k\check{l}.\vec{r} - \omega t\right) = A_0\, exp\, i\,(k(ch\gamma, 0, i\, sh\gamma)\vec{r} - \omega t) =$$
$$= A_0\, exp(-sh\gamma\, x_3 k)\,.\, exp\, i(ch\gamma\, x_1 k - \omega t)$$
$$A = A_0\, exp(-sh\gamma\, x_3 k)$$

Es una onda que viaja en la dirección de x_1 y se atenúa en la dirección de x_3. El coeficiente de atenuación es $\alpha = ksh\gamma$. La velocidad de fase se la haya haciendo constante la fase y derivando respecto del tiempo Fig.3.18

$$kch\gamma x_1 - \omega t = cte$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\omega}{kch\gamma} = \frac{c}{ch\gamma}$$



Al aumentar x_3 se va atenuando

Fig.3.18

Nota sobre la hipérbola equilátera

La función hiperbólica tiene en muchos aspectos semejanza con las funciones trigonométricas circulares, por tanto, didácticamente es conveniente hacer un desarrollo similar al que se realiza en las funciones circulares. Siendo para las funciones circulares Fig. 3.19

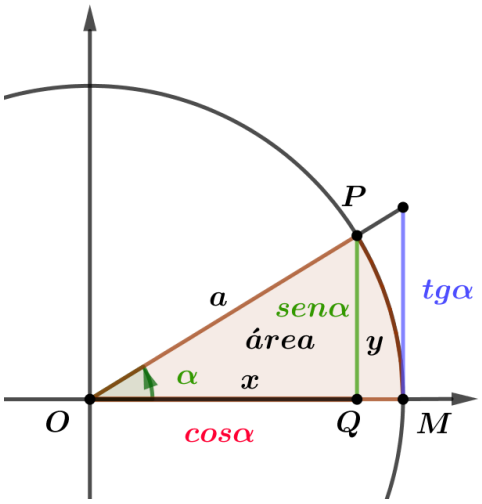


Fig. 3.19

Para visualizar la similitud expresemos el ángulo α en función del área del sector circular. El área de un sector circular es: $A = \frac{1}{2}.(radio)^2.\alpha$, el ángulo alfa en radianes. Luego, $\alpha = \frac{2A}{a^2}$ reemplazando en las funciones circulares tenemos

$$sen\alpha = sen\left(\frac{2A}{a^2}\right) = \frac{y}{a} \qquad \text{y} \qquad \cos \propto = cos\left(\frac{2A}{a^2}\right) = \frac{x}{a}$$

Tratamos de replicar el desarrollo para funciones hiperbólicas, definiendo el "ángulo" hiperbólico como $t = \frac{2A}{a^2}$ por tanto

$$sht = sh\left(\frac{2A}{a^2}\right) = \frac{y}{a} \qquad \text{y} \qquad cht = ch\left(\frac{2A}{a^2}\right) = \frac{x}{a}$$

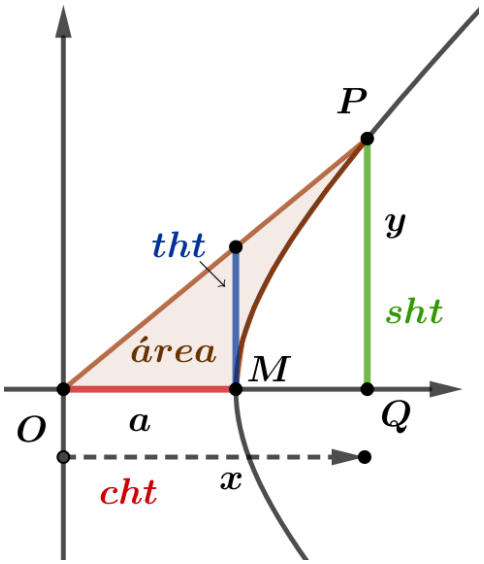


Fig.3.20

Las áreas y las funciones son representadas en las figuras, Se debe tener en cuenta que el ángulo hiperbólico no es un ángulo ordinario. Las demás funciones hiperbólicas se definen como sus análogas en trigonometría y entre ellas existen las mismas relaciones. Fig. 3.20

3.12 Reflexión, Refracción, Lentitud

Existen varias maneras de llegar a las leyes de la reflexión y refracción (ley de Descartes-Snell), unas pueden ser mediante razonamientos puramente geométricos, utilizando el "Principio de Huygens", "Principio de Fermat" o bien el "Teorema de Malus-Dupin". En todos los casos se arriba a las leyes reflexión y refracción para medios isótropos, también es posible llegar a idénticos resultados utilizando métodos analíticos. En esta oportunidad utilizaremos un método analítico no totalmente general, pero que nos permitirá rescatar algunas ideas que se aplicaran más adelante cuando estudiemos las leyes de la reflexión y refracción en medios anisótropos.

Supongamos dos solidos firmemente unidos a lo largo de un plano. Sabemos que una onda que incide de un medio a otro debe cumplir condiciones de continuidad en los desplazamientos y en las tensiones. Por tanto, la suma de todos los desplazamientos de un lado debe ser iguales al del otro (para las componentes que cumplen las condiciones de continuidad en el plano de separación). Algo similar debe sucede con las tensiones

$$u_i^I + u_i^R = u_i^T$$

$$\sigma_i^I + \sigma_i^R = \sigma_i^T$$

Donde los superíndices I, R, T denotan onda incidente, reflejado y transmitida respectivamente. Si trabajamos con una onda incidente plana, los desplazamientos que cumple continuidad en la interface ($\check{l}.\vec{r} = 0$ ecuación vectorial del plano normal a al versor $\check{l}$), sin especifica qué tipo de onda es, se puede escribir

$$A_i^I e^{i(\omega^I t - \vec{k}^I.\vec{r})} + B_i^R e^{i(\omega^R t - \vec{k}^R.\vec{r})} = C_i^T e^{i(\omega^T t - \vec{k}^T.\vec{r})}$$

Esta expresión se debe cumplir en todo instante

$$\omega^I = \omega^R = \omega^T$$

y en todo punto de la interface $\check{l}.\vec{r} = 0$ también se cumple,

$$\vec{k}^I.\vec{r}\big|_{int.fase} = \vec{k}^R.\vec{r}\big|_{int.fase} = \vec{k}^T.\vec{r}\big|_{int.fase}$$

Luego, de esta expresión se llega

$$\left(\vec{k}^R - \vec{k}^I\right).\vec{r} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\vec{k}^T - \vec{k}^I\right).\vec{r} = 0$$

Esto indica que los vectores $\left(\vec{k}^R - \vec{k}^l\right)$ y $\left(\vec{k}^T - \vec{k}^l\right)$ son perpendiculares al plano de la interface y contenidos en el ´´plano de incidencia determinados por los vectores

$\vec{k}^I$ y $\check{l}$. Fijando un sistema de coordenadas donde el plano de incidencia es el $(0,1,0)$ y el plano de interfase $\check{l}. = (0,0,1)$, se puede hallar los respectivos números de onda.

$$\vec{k}^I = \begin{pmatrix} k_x^I \\ 0 \\ k_z^I \end{pmatrix} \quad \vec{k}^R = \begin{pmatrix} k_x^R \\ 0 \\ k_z^R \end{pmatrix} \quad \vec{k}^T = \begin{pmatrix} k_x^T \\ 0 \\ k_z^T \end{pmatrix}$$

Luego

$$\vec{k}^I.\vec{r}\big|_{int.fase} = xk_x^I sen\theta^I = \vec{k}^R.\vec{r}\big|_{int.fase} = xk_x^R sen\theta^R = \vec{k}^T.\vec{r}\big|_{int.fase} = xk_x^T sen\theta^T$$

Por tanto

$$k_x^I sen\theta^I = k_x^R sen\theta^R = k_x^T sen\theta^T$$

Y como vimos que la frecuencia es igual en los distintos medios nos queda la ley de Descartes-Snell

$$\frac{sen\theta^I}{c^I} = \frac{sen\theta^R}{c^R} = \frac{sen\theta^T}{c^T} = p$$

En el esquema de la Fig. 3.21 se representa los ángulos y las distintas ondas

La magnitud p se lo llama parámetro de la trayectoria del rayo y de alguna manera engloba en una sola medida las leyes de la reflexión y refracción; ***"en una interface la magnitud p tiene el mismo valor para todas las ondas"***

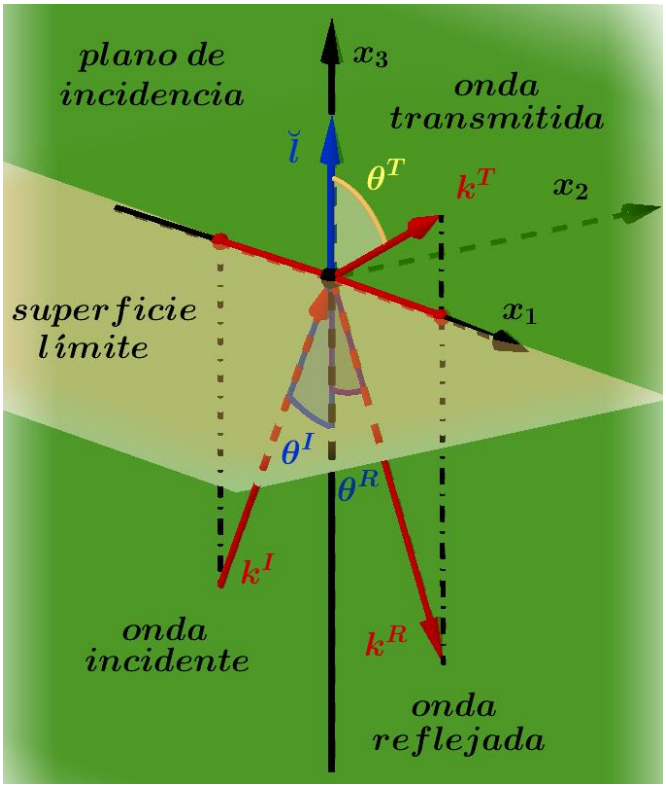


Fig. 3.21

Si el medio no es homogéneo, y está constituido por una serie de capas paralelas distintas entre sí, se requiere que la magnitud p se conserve en todas las capas.

Debemos destacar que las componentes en la dirección del eje de x_1 del vector número de onda se conserva al cambiar de medio con vemos en la, Fig. 3.22

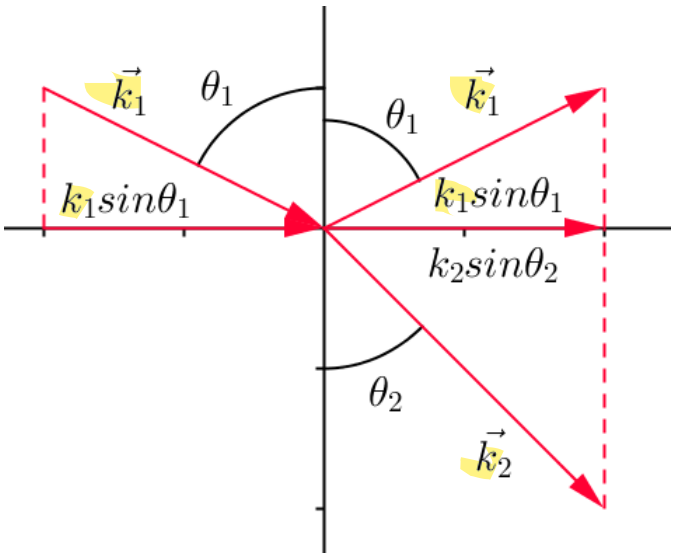


Fig. 3.22

Si los medios son isótropos las velocidades, c_1 y c_2 no depende de la dirección de propagación, luego si representamos las velocidades según el ángulo de propagación obtendremos esferas en el espacio y en el plano círculos. Si definimos la inversa de la velocidad, lentitud $\vec{m} = \frac{1}{\vec{c}}$ vemos de la ley de Snell que se rescata la conservación de la componente x_1 cuando cambiamos de medio,

$$m_1 \, sen\, \theta_1 = m_2 \, sen\, \theta_2$$

Similar a lo que sucede con el número de onda. En el grafico siguiente Fig. 3.23 se observa lo comentado. Las circunferencias representan la lentitud.

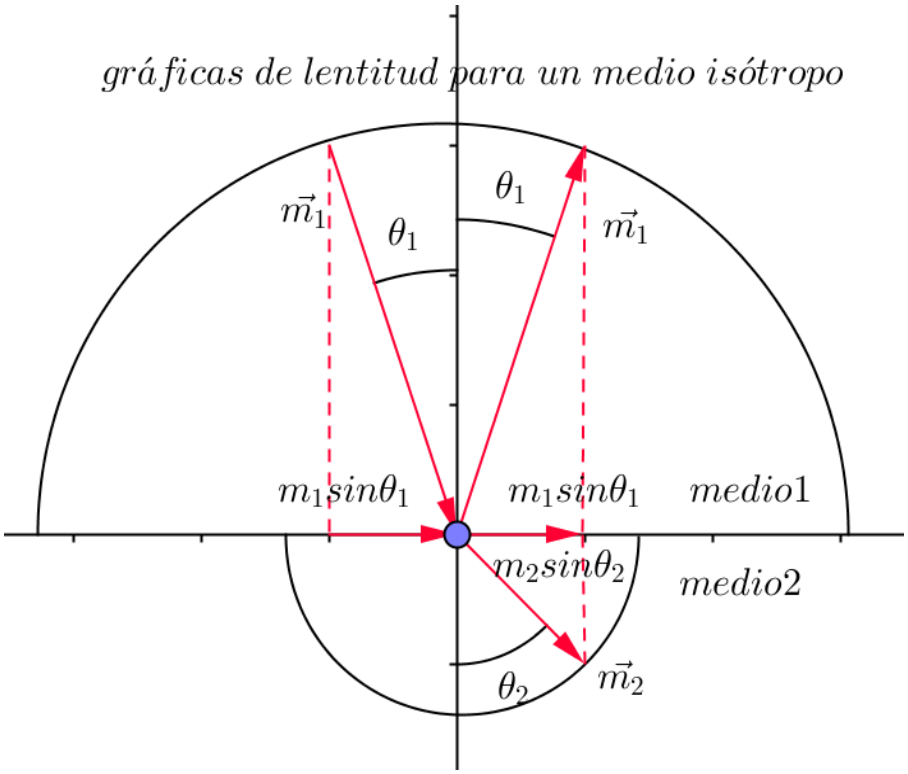


Fig. 3.23

3.13 Generalización de la ley de Descartes-Snell, Conversión de modos

Anteriormente no se especificó qué tipo de onda incidía podría haber sido longitudinal o transversal. Sin embargo, omitimos un fenómeno exclusivo de las ondas elásticas en los sólidos, llamado conversión de modos. Si una onda P o S incide sobre la superficie de separación de dos sólidos isótropos y homogéneos generalmente se generan dos ondas, una P y otra S reflejadas y otras dos P y S refractadas. El esquema siguiente Fig. 3.24 ejemplifica lo mencionado.

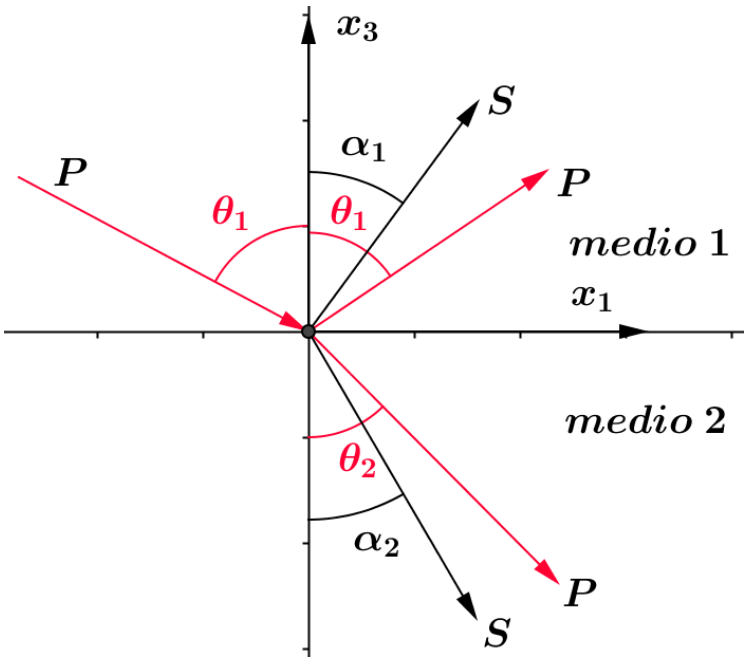


Fig. 3.24

La generalización geométrica de la ley de Snell es inmediata si suponemos la invariancia de la componente x_1 de la lentitud en ambos lados la interfase

$$m_{P1}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = m_{S1}\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = m_{P2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = m_{S2}\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = p$$

O bien

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta_1}{c_{P1}} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha_1}{c_{S1}} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta_2}{c_{P2}} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha_2}{c_{S2}} = p$$

Siendo c_{P1} la velocidad de las ondas longitudinales en el medio 1, c_{P2} ídem en el medio 2. Similarmente, c_{S1} la velocidad de las ondas transversales en el medio 1 y c_{S2} ídem en el medio 2. Expresión general de la ley de Snell.
Como los medios son isótropos la representación gráfica de la lentitud está dada por círculos concéntricos en el plano, como puede observarse en la Fig. 3.25

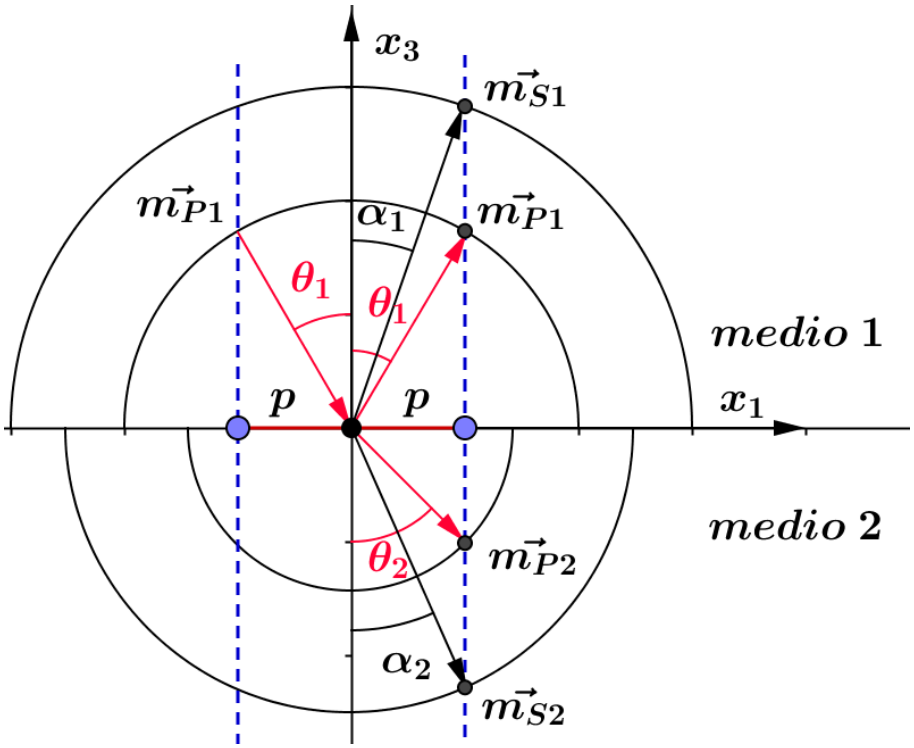


Fig. 3.25

Ejercicio

Consideremos el caso de una reflexión en una superficie libre Dibujamos los diagramas de lentitud para las ondas P, y S en el plano de incidencia. Cada una consiste de un círculo y una hipérbola, puesto que suponemos isotropía. Una onda longitudinal m_P^I incide bajo un ángulo θ_p, por conversión de modos se genera m_S^R y m_P^R, como podemos observar en el esquema adjunto Fig. 3.26

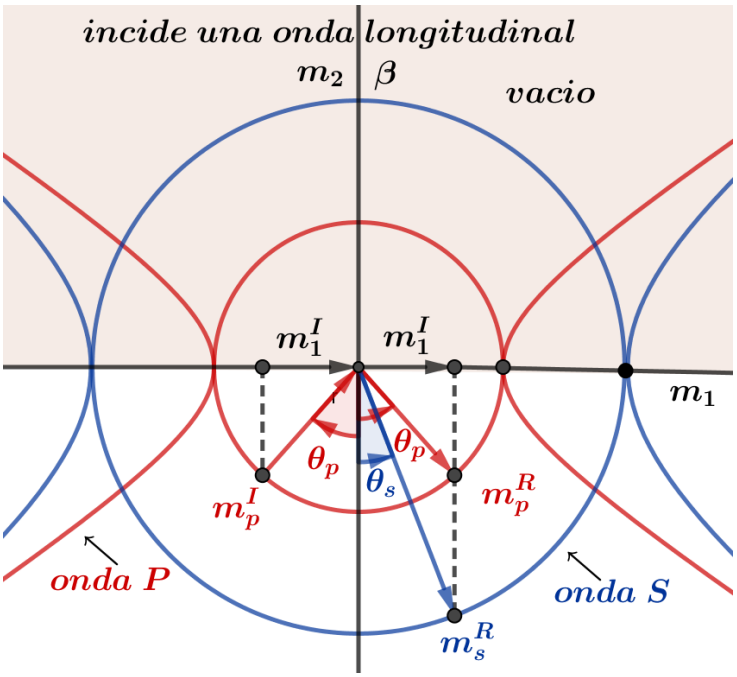


Fig. 3.26

La componente m_1 de los vector se conserva, de acuerdo a la ley de Snell, luego

$$m_s sen\theta_s = m_p sen\theta_p$$

de donde se halla θ_s

$$sen\theta_s = \frac{m_p sen\theta_p}{m_s}$$

El cociente $\frac{m_p}{m_s}$ depende del material y se lo puede determinar por el coeficiente de Poisson ν. Veamos el caso siguiente, Aquí las condiciones son similares al anterior. La diferencia, como se observa en la Fig. 3.27, es que incide una onda S. Con un razonamiento similar al aplicado anteriormente se obtiene el ángulo θ_p .En ambos l esquema se observa que la componente de la lentitud m_1 en la superficie libre es menor que m_p y m_s que son la lentitud de la onda P y S respectivamente.

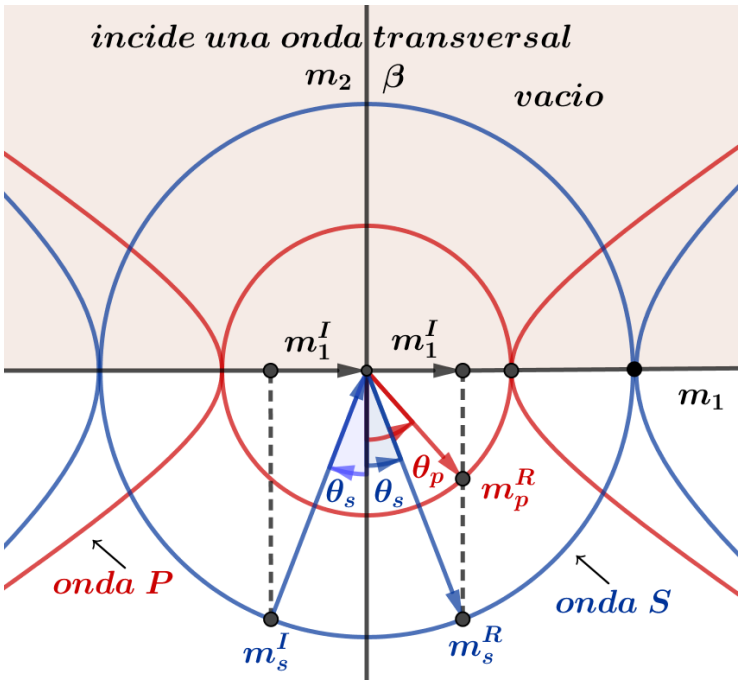


Fig.3.27

Analizamos seguidamente el caso en el cual el rayo m_s^I incidente bajo un ángulo tal, que el rayo reflejado m_P^R emerge con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Fig. 3.28. La metodología es similar a las anteriores, posibilitando en este caso encontrar β, el coeficiente de atenuación de la onda, como fue visto anteriormente. Recordando que

$$u_i = A_i e^{i\omega(x_1 m_1 + i x_2 \beta - t)} = A_i e^{-\omega x_2 \beta}\, e^{i\omega(x_1 m_1 - t)} \text{ luego}$$

$$m_1 = m \operatorname{ch}\gamma \qquad \beta = m \operatorname{sh}\gamma,$$

tenemos una onda que se atenúa la amplitud en la dirección de x_2 y se propaga en dirección de x_1 con una velocidad de fase que se halla haciendo la fase constante

$$\omega(x_1 m_1 - t) = \text{cte}$$

$$\frac{dx_1}{dt} m_1 - 1 = 0$$

$$c' = \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{m_1} = \frac{c}{\operatorname{ch}\gamma}$$

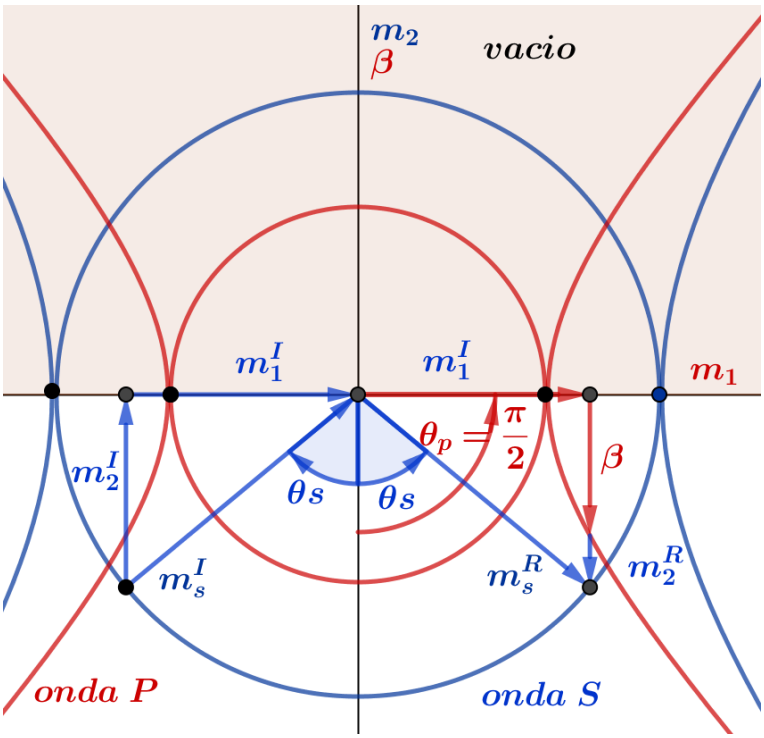


Fig. 3.28

3.14 Ondas P-SV y SH

Avancemos un poco más en este análisis. Los primeros estudios en estos temas fueron realizados para en las ondas sísmicas. Como vimos anteriormente el problema se simplifica si eligiendo un sistema de coordenadas en el cual los rayos estén contenidos en el plano, $(x_1\,, x_3)$, Fig. 3.29 ya que de esta manera se pueden estudiar por separado los distintos desplazamientos como veremos en esta parte del texto.

Trabajaremos con los potenciales y suponemos que la onda plana se propaga en el plano $(x_1\,, x_3)$ donde hay dos materiales con características distintas. Luego los desplazamientos son funciones de $\vec{r}$ y t

Sabemos que

$$\vec{u}\,(\vec{r}\,,\mathrm{t}) = \vec{\nabla}\,\varphi(\vec{r}\,,\mathrm{t}) + \vec{\nabla}\times\vec{\Psi}(\vec{r}\,,\mathrm{t})$$

El vector potencial vectorial lo podemos escribir

$$\vec{\Psi}(x_1, x_3, t) = \vec{\Gamma}(x_1, x_3, t) + \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{Z}}\,(x_1, x_3, t)$$

En nuestro caso particular son funciones de $(x_1\,, x_3, t)$, luego el desplazamiento es

$$\vec{u}\,(x_1, x_3, t) = \vec{\nabla}\,\varphi(x_1, x_3, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\Gamma}(x_1, x_3, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z}\,(x_1, x_3, t)$$

Si bien $\vec{\Gamma}$ y $\vec{Z}$ son funciones de (x_1, x_3, t) solo tienen como vector componente en x_2 luego

$\vec{\Gamma}(x_1, x_3, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma(x_1, x_3, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ que llamamos SV y $\vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ Z(x_1, x_3, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ llamamos SH

Nomenclatura proveniente de la geofísica e indica, SV onda S de propagación vertical mientras que SH onda S de propagación horizontal, puesto que en sismología las observaciones de las ondas se realizan en la superficie de la tierra, con respecto al sistema de ejes geográficos (x_1, x_2, x_3) , Norte, Oeste, Zenit. El plano (x_1, x_2) es el horizontal.

Calculemos los distintos términos del desplazamiento

Onda P $\quad \vec{\nabla}\,\varphi(x_1, x_3, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

Teniendo en cuenta la definición de rotor $\vec{\nabla} \times \vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$ se llega a

Onda SV $\quad \vec{\nabla} \times \vec{\Gamma}(x_1, x_3, t) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Gamma(x_1, x_3, t)}{\partial x_3} \\ 0 \\ \frac{\partial \Gamma(x_1, x_3, t)}{\partial x_1} \end{pmatrix}$

Onda SH $\quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z}\,(x_1, x_3, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 Z(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Z(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Vemos que las ondas P y SV tienen componente en x_1, x_3 mientras que SH solo tiene componente en x_2 esto indica que la propagación de P y SV están acopladas y la SH esta desacoplada, dicho de otro modo, P-SV es independiente de SH

Si se reemplaza en el desplazamiento obtenemos

$$\vec{u}\,(x_1, x_3, t) = \vec{\nabla}\,\varphi(x_1, x_3, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\Gamma}(x_1, x_3, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z}\,(x_1, x_3, t) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x_1,x_3,t)}{\partial x_1} \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi(x_1,x_3,t)}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Gamma(x_1,x_3,t)}{\partial x_3} \\ 0 \\ \frac{\partial\Gamma(x_1,x_3,t)}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 Z(x_1,x_3,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Z(x_1,x_3,t)}{\partial x_3^2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$u_{x_1} = \frac{\partial\varphi(x_1,x_3,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial\Gamma(x_1,x_3,t)}{\partial x_3}$$

$$u_{x_2} = -\frac{\partial^2 Z(x_1,x_3,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Z(x_1,x_3,t)}{\partial x_3^2}$$

$$u_{x_3} = \frac{\partial\varphi(x_1,x_3,t)}{\partial x_3} + \frac{\partial\Gamma(x_1,x_3,t)}{\partial x_1}$$

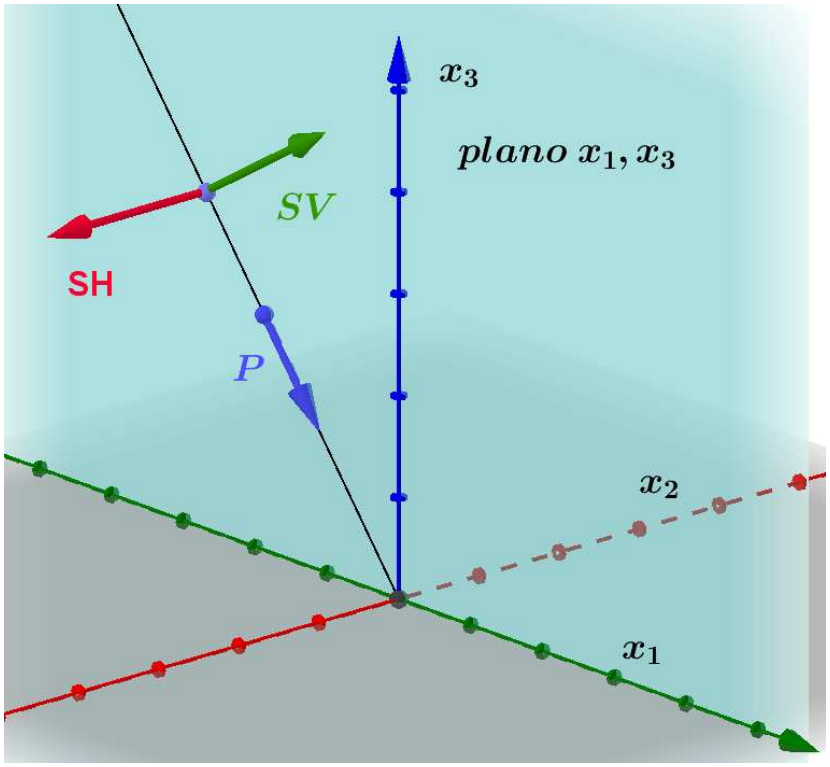


Fig. 3.29

Resumiendo lo realizado hasta ahora, con una elección particular del sistema de coordenadas, plano de incidencia (x_1, x_3) . De esta manera se pudo elegir para las ondas S dos polarizaciones perpendiculares entre sí, las ondas SV con desplazamiento en el plano (x_1, x_3) y las SH con desplazamiento en el eje , x_2 y

que es paralela a la superficie (x_1, x_2). Con esta particular elección se logra el desacople de las P-SV de las SH. Fig. 3.30

Analicemos la ley de Snell:

1. Si $c_2 < c_1$entonces

$$\frac{sen\,\theta_1}{sen\,\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} > 1 \;\rightarrow \frac{sen\,\theta_1}{sen\,\theta_2} > 1 \rightarrow \theta_1 > \theta_2$$

2. Si $c_2 > c_1$ en este caso θ_2 puede valer 90°, luego

$$sen\,\theta_1 = \frac{c_1}{c_2} \;\; \therefore \;\; \theta_1 = arc\,sen(\frac{c_1}{c_2})$$

El ángulo de incidencia para el cual la onda refractada sale a 90° se lo llama ángulo crítico θ. La onda refractada viaja a lo largo de la interfase. Si el ángulo de incidencia es mayor que el crítico no se satisface la ley de Snell, sin embargo, es posible seguir trabajando aceptando ángulos imaginarios y llegar a la ecuación de la onda que se propaga a lo largo de la interface. De acuerdo al esquema se define el ángulo imaginario $i\theta$

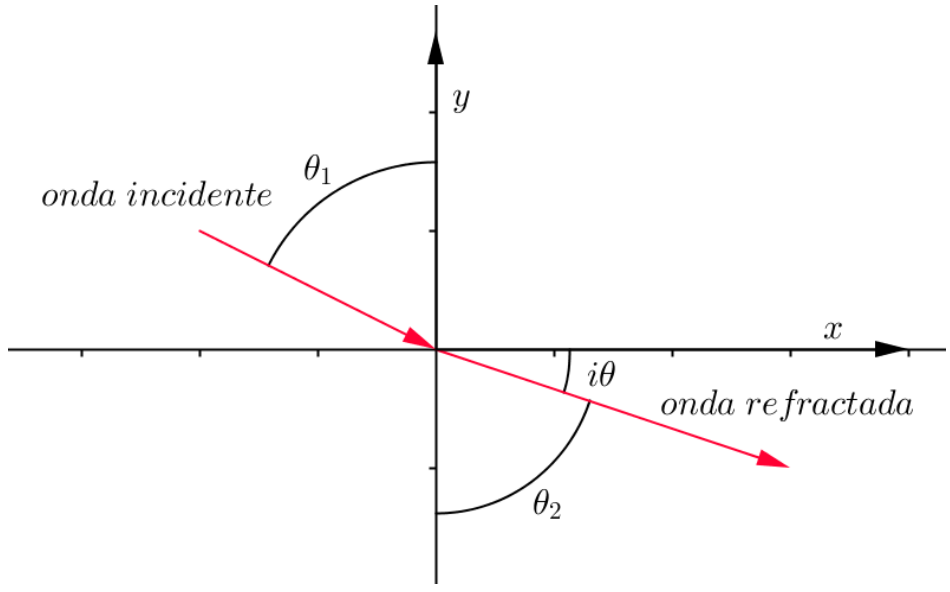


Fig. 3.30

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\theta \rightarrow sen\,\theta_2 = sen\left(\frac{\pi}{2} - i\theta\right) = cos(i\theta) = ch\,\theta$$

Mientras que

$$cos\,\theta_2 = cos\left(\frac{\pi}{2} - i\theta\right) = sen(i\theta) = i\,sh\,\theta$$

Reemplazando en la función de onda

$$\varphi_t = A_t e^{i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k}_2 = (k\,ch\,\theta\,, ik\,sh\,\theta\,, 0) \quad \vec{r} = (x, y, 0)$$

$$\vec{k}_2\vec{r} = k\,xch\,\theta + iky\,sh\,\theta$$

$$\varphi_t = A_t e^{i(\vec{k}_2\vec{r} - \omega t)} = A_t e^{i(\,k\,xch\,\theta + ik\,ysh\,\theta - \omega t)} = A_t e^{(-k\,ysh\,\theta)} e^{i(\,k\,xch\,\theta - \omega t)}$$

Observamos que la amplitud decrece con el aumento de y, siendo proporcional a $\sinh\theta$. Este tipo de onda evanescente puede existir en ambos lados de la interfase, disminuyendo a medida que nos alejamos de la interface.

3.15 Polarización y vector Polarización

Antes de comenzar con el próximo tema es conveniente introducir el concepto de polarización y resolver ejercicios sobre el tema. Por supuesto que hablaremos solo de ondas trasversales

Imaginemos dos ondas elásticas vectoriales, ortogonales que interactúan en un punto y viajan en la dirección positiva de x_1

$$\vec{u}_2(x_1, t) = \check{\jmath} A_{02} \cos(kx_1 - \omega t)$$

$$\vec{u}_3(x, t) = \check{k} A_{03} \cos(kx_1 - \omega t + \varepsilon)$$

Observemos que las amplitudes están en las direcciones de los versores $\check{\jmath}$ y $\check{k}$ respectivamente y ε es la diferencia de fase entre ambas ondas. Las dos ondas se propagan con igual frecuencia. La perturbación resultante será la suma vectorial de las dos ondas perpendiculares. Fig. 3.31

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}_2(x_1,t) + \vec{u}_3(x_1,t)$$

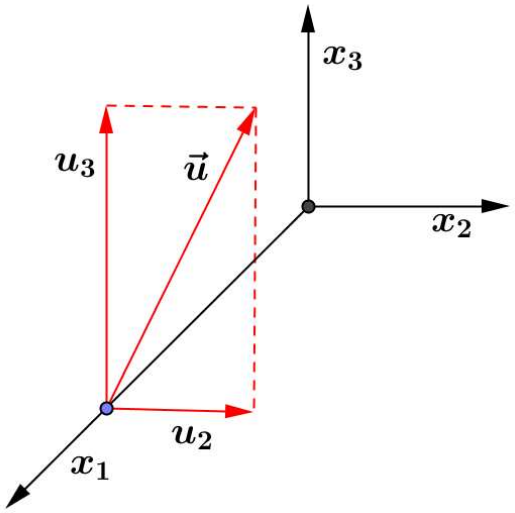


Fig. 3.31

Encontremos la expresión que describe el movimiento del extremo del vector u al propagarse. Esta ecuación no debe ser función ni de x ni de t, luego trabajando con los módulos Fig. 3.32

$$u_3 = A_{03}[cos(kx_1 - \omega t)\ cos\,\varepsilon - sin(kx_1 - \omega t)\ sin\,\varepsilon\,]$$

$$\frac{u_3}{A_{03}} = cos(kx_1 - \omega t)\ cos\,\varepsilon - sin(kx_1 - \omega t)\ sin\,\varepsilon$$

Remplazando $cos(kx_1 - \omega t)$ por $\frac{u_2}{A_{02}}$

$$\frac{u_3}{A_{03}} = \frac{u_2}{A_{02}} cos\,\varepsilon - \ sin(kx_1 - \omega t)\ sin\,\varepsilon$$

Como

$$u_2(x,t) = A_{02}\cos(kx_1 - \omega t)$$

$$\frac{u_2}{A_{02}} = \cos(kx_1 - \omega t)$$

De donde deducimos que

$$(\sin(kx_1 - \omega t))^2 = 1 - \left(\frac{u_2}{A_{02}}\right)^2$$

Remplazando

$$\frac{u_3}{A_{03}} = \frac{u_2}{A_{02}}\cos\varepsilon - \sqrt{\left[1 - \left(\frac{u_y}{A_{0y}}\right)^2\right]}$$

Desarrollando el binomio y ordenando los términos queda la expresión siguiente

$$\left(\frac{u_3}{A_{03}}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{A_{02}}\right)^2 - 2\left(\frac{u_3}{A_{03}}\right)\left(\frac{u_2}{A_{02}}\right)\cos\varepsilon = (\sin\varepsilon)^2$$

Es la ecuación de una elipse que forma un ángulo α con el sistema de coordenadas (u_2, u_3), de manera que,

$$\tan 2\alpha = \frac{2u_{02}u_{03}\cos\varepsilon}{u_{02}^2 - u_{03}^2}$$

Vemos que si $\varepsilon = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2} \pm\frac{5\pi}{2}$.... él $\cos\varepsilon$ es cero ∴ $\tan 2 \propto = 0$ luego tenemos la forma conocida de la elipse,

$$\left(\frac{u_3}{A_{03}}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{A_{02}}\right)^2 = 1$$

Si además las amplitudes son iguales tenemos una circunferencia. Si ε es múltiplo par de π la ecuación se reduce a una recta de pendiente igual a $\pm\frac{A_{03}}{A_{02}}$, Fig. 3.33

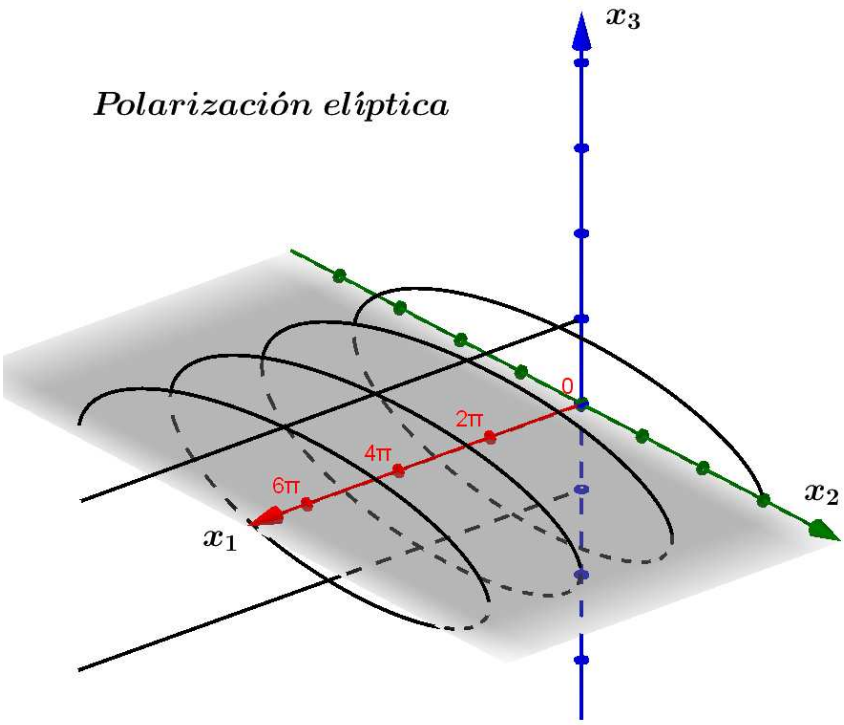


Fig. 3.32

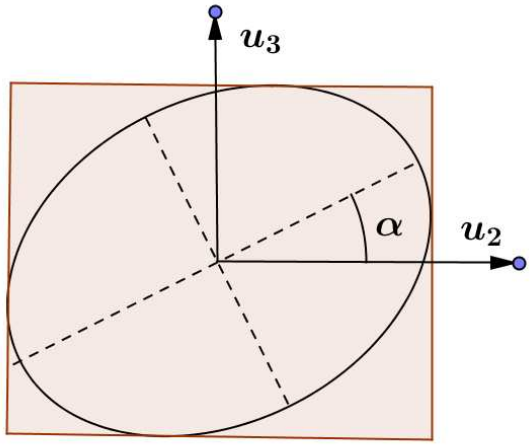


Fig. 3.33

Recordemos que lo hallado es la figura geométrica que describe el extremo del vector suma de las dos ondas, vimos que en general es una elipse y decimos que la onda es elípticamente polarizada, si además las amplitudes son iguales se dice

que es circularmente polarizada, cuando se reduce a rectas se la llama linealmente polarizada.

El vector amplitud es llamado vector polarización y de alguna manera define la polarización de la onda.

Si las frecuencias no son iguales el movimiento resultante no es armónico y si el cociente entre frecuencias es irracional el movimiento no es ni siquiera periódico. Las expresiones de u_2, u_3 son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que describe la partícula y se las llama curvas de Lissajous. La forma de estas depende de la relación de períodos de los movimientos componentes, del desfasaje existente y de las amplitudes En general las curvas están contenidas dentro del rectángulo formado por las amplitudes de las ondas componentes. Estas curvas son cerradas si el cociente de las frecuencias es racional. En caso contrario, se describen trayectorias abiertas que, a lo largo del tiempo llenan el rectángulo $(A_1 \times A_2)$ pasando tan cerca como se quiera de cualquier punto, sin cerrarse nunca. La trayectoria seguida es muy sensible a las pequeñas variaciones de los parámetros iniciales, una pequeña variación de la frecuencia convertirá una curva cerrada en abierta.

- ¿Cómo se imagina una onda longitudinal polarizada? -

Ejemplo

Estudiar la onda siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(\omega t - kx)$$

Vemos que no tiene componente en x..

$$u_2 = 2\sin(\omega t - kx)$$

$$u_2^2 = 4sin^2(\omega t - kx)$$

$$u_3 = 3\sin(\omega t - kx)$$

$$u_3^2 = 9sin^2(\omega t - kx)$$

Sumando

$$r^2 = u_2^2 + u_3^2 = 13sin^2(\omega t - kx)$$

$$r = \sqrt{13}\,\sin(\omega t - kx)$$

La onda se mueve en la dirección positiva de las x. El movimiento se realiza a lo largo de una recta cuya pendiente es $\frac{3}{2}$ .Vemos que el punto $x = 0$ oscila en el tiempo con frecuencia ω a lo largo de la recta. Decimos que la onda se encuentra polarizada linealmente. Fig. 3.34

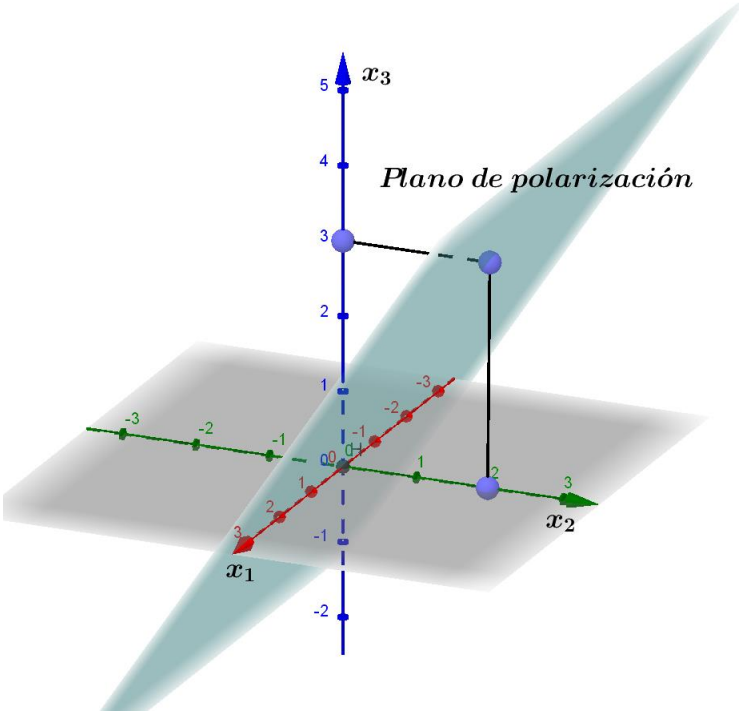


Fig. 3.34

Otro ejemplo

Estudiar la onda siguiente

$$u_i = A_{0i}e^{i[k(l_n x_n) - \omega t]}$$

Siendo

$$A_{0i} = \left(0; \quad A; \quad Ae^{i\frac{\pi}{2}}\right) \text{ y } l_n = (1; \quad 0; \quad 0)$$

Remplazando y tomando la parte imaginaria

$$u_i = (0; A; Ae^{i\frac{\pi}{2}})e^{i(kx-\omega t)}$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = A\sin(kx - \omega t)$$

$$u_3 = A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$r^2 = (A\sin(kx - \omega t))^2 + (A\cos(kx - \omega t))^2$$

$$r = A$$

r gira en sentido horario y se mueve en la dirección de x como lo indica l_n. r nunca se hace cero. Se encuentra polarizada circularmente. Fig. 3.35

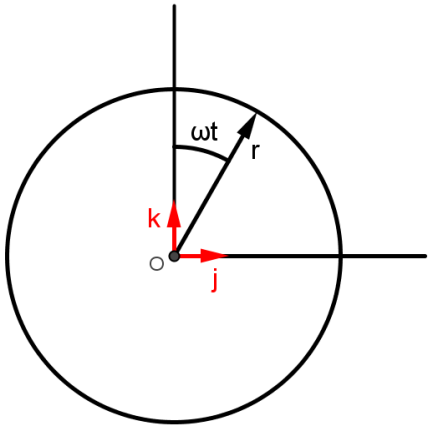


Fig. 3.35

4

"¿Cómo puede ser que la matemática,
siendo al fin y al cabo un producto del pensamiento humano
independiente de la experiencia, esté tan
admirablemente adaptada a los objetos reales?"
Albert Einstein

Capítulo 4 - TRANSFORMA DE FOURIER Y PROPIEDADES

En el párrafo siguiente y en otros posteriores vamos a utilizar reiteradamente la transformada de Fourier y algunas de sus cualidades, por tanto, se cree necesario recordar las propiedades más utilizadas en el tema de las ondas elásticas, por supuesto que algunos de estas propiedades son también usados en ondas electromagnéticas, en mecánica cuántica, vibraciones mecánicas o análisis de señales.

4.1 Definición de transformada de Fourier

Dada una función $f(x) \in L(\mathbb{R})$ se llama transformada de Fourier $F = \mathcal{F}(f): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, siendo $k \epsilon \mathbb{R}$ a

$$F = \mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx} dx$$

Donde $F = \mathcal{F}\big(f(x)\big)$ es la función transformada de $f(x)$. Observemos que la función transformada tiene como variable a p luego $F(p) = \mathcal{F}(f(x))$, hemos pasado de la variable $x \to p$. Luego esto nos lleva a definir la transformada inversa con la cual retornaríamos a la variable x. La transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}(F(p)) = f(x)$ es

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p)\, e^{ipx} dp$$

Utilizando como regla que la transformada de Fourier se indicará con la misma letra de la función, pero mayúscula. Dada la simetría de la transformada y su

inversa, son posibles otras definiciones de las mismas. En algunos casos por simplicidad puede que utilicemos $F = \mathcal{F}(f) = \hat{f}$

En nuestro caso trabajaremos con funciones de onda $\varphi(x,t)$ luego la variable que cambiará será x y $p = k$ el número de onda, por tanto, pasamos del dominio x al dominio k.

$$\Phi(k,t) = \mathcal{F}(\varphi(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,t)\, e^{-ikx} dx$$

Por tanto, podemos expresar la transformada como

$$F(k) = \mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx$$

Y la antitransformada como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx} dk$$

En esta última expresión $F(k)$ representa la contribución de cada exponencial compleja para representar la función $f(x)$. Dicho de otro modo, estamos expandiendo la función $f(x)$ en términos de funciones armónicas e^{ikx}. En general $F(k)$ es una función compleja de k con propiedades que se irán viendo, luego la podemos representar como una función polar compleja

$$F(k) = |F(k)| e^{i\alpha(k)}$$

O bien como par ordenado.

Ahora recordaremos las condiciones que son suficientes para asegurar la existencia de la transformada de Fourier, nos referimos a las condiciones de Dirichlet que requieren los siguientes tres puntos de la función

1. La $f(x)$ debe ser absolutamente integrable, o sea,
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$
2. Dentro de un intervalo finito, $f(x)$ puede tener un número finito de máximos y mínimos.
3. $f(x)$ puede tener una cantidad finita de discontinuidades dentro de un intervalo también finito. Además, debe ser finita la discontinuidad.

Hay casos particulares en las cuales la función puede violar alguna de las condiciones y tener transformada de Fourier.

4.2 Algunas de las propiedades de la transformada de Fourier

1. linealidad $\mathcal{F}(af(x)+bg(x)) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x))$
2. Dualidad $\mathcal{F}\big(F(x)\big) = f(-k)$
3. Simetría conjugada: Si $f(x)$ es real entonces $F(-k) = F^*(k)$
4. Traslación en el espacio $\mathcal{F}(f(x-a)) = F(k)e^{-ika}$
5. Traslación en el número de onda $\mathcal{F}\big(f(x)e^{ixk_0}\big) = F(k-k_0)$
6. Derivación en el tiempo $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = (ik)F(k)$
7. Derivación en el número de onda $\mathcal{F}\big((ix)f(x)\big) = \frac{\partial F(k)}{\partial k}$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k_0)x}dx = 2\pi\delta(k-k_0)$
9. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$

Recordando

Repasemos algunas propiedades de la "función" delta o "función" impulso $\delta(x)$. El hecho de colocar entre comillas la palabra función es para resaltar que la delta no puede ser tratada como una función ordinaria ya que no cumple con la definición de función. De manera rudimentaria podemos definir a la $\delta(x)$ como un pulso de amplitud infinita en una posición infinitamente pequeña. En esta definición se conjugan dos infinitos el grande y el pequeño. La delta posee las siguientes propiedades:

1. $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$
2. $\delta(x) \to \infty$ para $x \to 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

Las propiedades anteriores pueden ser resumidas en la siguiente expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

Para $f(x)$ continua en $x = x_0$.

Calculemos la transformada de Fourier de $\delta(x-x_0)$

$$\mathcal{F}\big(\delta(x-x_0)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}$$

Luego

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}\right)=\delta(x-x_0)$$

Así, también se cumple que

$$\mathcal{F}\big(\delta(x)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

O sea

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\delta(x)\quad\therefore\quad\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk$$

Veamos la relación existente entre la función delta y la función de Heaviside o función escalón definida de la siguiente manera:

$$u(x)=\begin{cases}0\ \ si\ \ x<0\\1\ \ si\ \ x>0\end{cases}$$

Se demuestra que

$$\frac{du(x)}{dx}=\delta(x)$$

Es claro que la función escalón no está definida en cero y la derivada vale en $x>0$ y $x<0$.

La función signo de x , $sig(x)$, es definida de la siguiente manera

$$sig(x)=\begin{cases}-1\ \ si\ \ x<0\\0\ \ si\ \ x=0\\1\ \ si\ \ x>0\end{cases}$$

En algunos casos es conveniente definirla como

$$sig(x)=-1+2u(x)$$

Ejercicio

Probar que la transformada inversa de la trasformada genera la función original, o sea $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\big(f(x)\big)\right)=f(x)$

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(k)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

Donde

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}dx$$

Reemplazando

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(F(k)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}dx\right]e^{ikx}dk$$

Para prevenir confusiones es útil reemplazar variable llamando u a la variable x en la integral que se encuentra entre los corchetes

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iku}du\right]e^{ikx}dk$$

Intercambiando el orden de integración

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-u)}\, dk\right]du$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp ik(x-u)}\, dk = 2\pi\delta(x-u)$$

Por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi\delta(x-u)\right]du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\delta(x-u)]du = f(x)$$

Ejercicio

Comprobar la siguiente expresión que $\mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f(x))\big) = f(-x)$.

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

Nuevamente cambiando de variable

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f(x))\big) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-iku}du\right]e^{-ikx}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx-iku)}\,dx\right]du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(u-(-x))}\,dx\right]du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\delta(u-(-x))]du = f(-x)$$

Ejercicio

Demostrar la propiedad 2 Dualidad

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(k)\big) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

Luego

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx}dk$$

Cambiando las variables $x \Leftrightarrow k$

$$f(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ixk}dx = \mathcal{F}\big(F(x)\big)$$

$$\mathcal{F}\big(F(x)\big) = f(-k)$$

Ejercicio

Demostrar la propiedad 4, traslación en el espacio.

Partimos de

$$\mathcal{F}(f(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-ixk}dx =$$

Llamando $u = x - a \rightarrow x = u + a$ y $du = dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ik(u+a)}du = \frac{e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ik(u)}du = e^{-ika}\hat{f}(k)$$

Ejercicio

Demostrar la propiedad 5, Translación en el número de onda.

Partimos de

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(k-k_0)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k-k_0)e^{ixk}dk =$$

Cambiando de variable $u = k - k_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big[F(u)e^{ix(u+k_0)}\big]du = \frac{e^{ik_0x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{ixu}du$$

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(x)\big)e^{ixk_0} \Longrightarrow f(x)e^{ixk_0} = \mathcal{F}^{-1}\big(F(k-k_0)\big)$$

Por lo tanto, transformando

$$\mathcal{F}\big(f(x)e^{ixk_0}\big) = F(k-k_0)$$

Ejercicio

Probar la expresión 6 $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)$=$(ik)F(k)$

Partimos de

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x}e^{-ixk}dx =$$

Integrando por partes, llamando

$$u = e^{-ixk} \quad \therefore \quad du = (-ik)e^{-ixk}dx$$

$$dv = \frac{\partial f(x)}{\partial x}dx \quad \therefore \quad v = f(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x}e^{-ixk}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-ixk}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-ik)f(x)\,e^{-ixk}dx\right] =$$

Como

$$e^{-ixk}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)f(x)\,e^{-ixk}dx = (ik)F(k)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)=(ik)F(k)$$

Recordemos la importancia de esta propiedad, al aplicar la transformada de Fourier a una derivada la transforma en un producto.

Ejercicio

Probar la expresión 7 $\mathcal{F}\big((-ix)f(x)\big) = \frac{\partial F(k)}{\partial k}$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx$$

Derivando

$$\frac{\partial F(k)}{\partial k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x)\, e^{-ikx} dx = \mathcal{F}\big((-ix)f(x)\big)$$

$$\mathcal{F}\big((-ix)f(x)\big) = \frac{\partial F(k)}{\partial k}$$

Ejercicio

A partir de la definición de $sig(x) = -1 + 2u(x)$ calcular la transformada de Fourier de $sig(x)$

$$\frac{d}{dx}\big(sig(x)\big) = 2\frac{du(x)}{dx} = 2\delta(x)$$

También

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\big(sig(x)\big)\right) = \mathcal{F}\big(2\delta(x)\big) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Pero

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\big(sig(x)\big)\right) = ik\mathcal{F}\big(sig(x)\big) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F}\big(sig(x)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{ik}$$

4.3 Convolución

Recordamos que no se verifica

$$\mathcal{F}\big(f(x)g(x)\big) \neq \mathcal{F}\big(f(x)\big)\mathcal{F}\big(g(x)\big)$$

Veamos a que es igual el producto de $\mathcal{F}\big(f(x)\big)\mathcal{F}\big(g(x)\big)$

$$\mathcal{F}\big(f(x)\big)\mathcal{F}\big(g(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iku}du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(u)\, e^{-ik(x+u)}dudx =$$

Llamando $s = x + u \;\rightarrow du = ds$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s-u)\, g(u)du\, e^{-ik(s)}ds =$$

Si se define a

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)du$$

Producto de convolución y se simboliza como $f(x) * g(x)$ la expresión anterior queda

$$\mathcal{F}\big(f(x)\big)\mathcal{F}\big(g(x)\big) = \mathcal{F}(f(x) * g(x))$$

Algunas propiedades de la convolución

1. Conmutatividad $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$
2. Asociativa $f(x) * \big(g(x) * h(x)\big) = \big(f(x) * g(x)\big) * h(x)$
3. Distributiva $f(x) * \big(g(x) \pm h(x)\big) = f(x) * g(x) \pm f(x) * g(x)$
4. Propiedades con la delta $f(x) * \delta(x) = f(x)$
5. Propiedades con la delta $f(x) * \ \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$

Ejercicio

Una posible utilización de la Convolución. Sabiendo que la transformada de Fourier de

$$\mathcal{F}\big(e^{-ax}u(x)\big) = \frac{1}{a + ik}$$

Hallar la transformada inversa de

$$F(k) = \frac{1}{2 - k^2 + 3ik}$$

Factorizando el denominador se llega

$$F(k) = \frac{1}{2 - k^2 + 3ik} = \frac{1}{(2 + ik)}\frac{1}{(1 + ik)}$$

Luego, se pretende hallar

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2 + ik)}\frac{1}{(1 + ik)}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(e^{-2x}u(x)\right)\mathcal{F}\left(e^{-x}u(x)\right)\right) =$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(e^{-2x}u(x) * e^{-x}u(x)\right)\right) = e^{-2x}u(x) * e^{-x}u(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-s)}u(x-s)\, e^{-s}u(s)ds$$

Vemos que en el integrando hay un producto de dos funciones escalón y como $u(s) = 1$ cuando $s > 0$ y $u(x - s) = 1$ cuando $x - s > 0$ o sea $x > s$ por tanto el producto vale 1 cuando $0 < s < x$ luego

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-2(x-s)}\, e^{-s}ds = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{s}\, ds = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2\pi}}|e^{s}|_{0}^{x} = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2\pi}}(e^{x} - 1) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-x} - e^{-2x})u(x)$$

4.4 Velocidad de Grupo, Ondas dispersivas

En el desarrollo de este trabajo el lector vero que se reitera temas y en otros casos un mismo tema es tratado de diferente manera, la razón de esta reincidencia es para sea de utilidad a distintas disciplinas, ya que según está, utiliza las nociones de diversa manera. Se verá que el tema velocidad de fase y de grupo es tratado en varias oportunidades.

Primero veamos una introducción elemental a las ondas dispersivas y velocidad de grupo conceptos fundamentales asociados a la propagación de ondas. Supongamos un medio elástico unidimensional. Sumemos dos ondas armónicas que tengan frecuencia angular y número de onda ligeramente diferente entre ellos.

$$\omega_1 = \omega + \delta\omega \quad \omega_2 = \omega - \delta\omega \quad \text{con} \quad \omega \gg \delta\omega$$

$$k_1 = k + \delta k \quad k_2 = k - \delta k \quad \text{con} \quad \text{k} \gg \delta\text{k}$$

$$\varphi(x,t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) \; =$$

$$= \cos[(\omega t - kx) + (\delta\omega t - \delta k x)] + \cos[(\omega t - kx) - (\delta\omega t - \delta k x)]$$

Recordando que

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

Queda

$$\varphi(x,t) = 2\cos(\delta\omega t - \delta k x)\cos(\omega t - kx)$$

Es fácil ver que este producto puede ser interpretado como una onda viajera de frecuencia alta multiplicada por una amplitud de baja frecuencia, es decir una portadora modulada por otra onda de baja frecuencia. Queda claro que la onda modulante viaja a una velocidad de

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

Que evidentemente es distinta a las dos velocidades de las ondas que se superponen. La velocidad de la envolvente es llamada velocidad de grupo o del paquete.

Veamos la relación que existe entre c_g y c

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ck)}{dk} = c + k\frac{dc}{dk} = c + \omega\frac{dc}{d\omega}$$

$$c_g = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}$$

Si $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$

$c(\lambda)$

Queda claro, de la última expresión, que si la velocidad de fase no es función del número de onda (frecuencia) las dos velocidades son iguales. Por el contrario, si es función decimos que la onda es dispersiva.

Si hablamos de un pulso que se está propaga, lo podemos pensar formado por una suma de componentes armónicas de distintas frecuencias, de acuerdo con Fourier. Si todas las componentes tienen la misma velocidad, (la velocidad no depende de la frecuencia), es claro que la forma del pulso se conserva siendo la velocidad de fase igual a la velocidad de grupo. Por el contrario, si cada componente de distinta frecuencia viaja a diferente velocidad estamos en presencia de una onda dispersiva. El paquete se dispersa a medida que viaja de acuerdo con la característica del medio. Hay medios que son naturalmente dispersivos y hay geometrías dispersivas.

Este último párrafo nos plantea una dificultad sobre la identidad o definición de onda. ¿Cómo definimos algo que al moverse va cambiando su forma? y en el peor de los casos puede llegar a desaparecer. Podemos decir que una onda es una señal o perturbación que al viajar es reconocible en cualquier instante y posición, la propagación es a través de un medio con una velocidad medible.

4.5 Generalización

Sigamos con este razonamiento tratando de extenderlo a más de dos ondas, para tal fin definimos un paquete sumando varias ondas armónicas que viajan en el sentido de las x positivas, pero como en el caso anterior con diferentes valores amplitud, número de onda y frecuencia.

$$\varphi_n = \acute{A}_n e^{i(k_n x - \omega_n t + \alpha)} \text{ para } 1 \leq n \leq N$$

En este caso el subíndice n indica la n-ésima onda armónica. Generalizando esta expresión para $N \to \infty$ con $k \in [0, \infty)$, como variable independiente. También se podría haber tomado ω como variable independiente, siendo $\acute{A}$, ω, y α funciones de k. Para mayor sencillez consideremos ondas escalares unidireccionales, luego

$$d\varphi_k(x,t) = e^{i(kx - \omega(k)t + \alpha(k))} d\acute{A}(k)$$

Como

$$d\acute{A}(k) = \frac{d\acute{A}}{dk} dk = A(k)dk$$

Donde $A(k)$ me da la variación de la amplitud por unidad de k (“densidad” de amplitud). Es posible incluir la fase inicial a la amplitud, luego queda

$$\varphi(x,t) = \int_0^\infty A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Como desde un comienzo se trabajó con ondas complejas, con la salvedad que el sentido físico debe encontrarse en la componente real de la onda. Con esta salvedad es claro extender el dominio de integración desde $-\infty$ a $+\infty$. En general tanto $\varphi(x,t)$ como $A(k)$ podrían ser funciones complejas. La razón de esta extensión del dominio se realiza para obtener ventajas matemáticas en el manejo de las expresiones, luego $\varphi(x,t)$ queda

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

También podríamos haber considerado k como una función de ω. El lector verá, con los cambios realizados estamos próximos a la Transformada de Fourier. Aquí también como en el resto del apunte suponemos que el lector tiene algunos conocimientos sobre matemáticas que los damos por sobre entendidos, en este caso partículas es sobre la transformada de Fourier.

Recordemos: que las ondas armónicas viajan todas en la misma dirección de las x positivas y que las propiedades dispersivas son las mismas si la onda se propaga hacia la derecha o hacia la izquierda lo cual implica que ω deberá ser una función para de k, $\omega(-k) = \omega(k)$. También recordemos que solo tiene sentido físico la parte real de la función de onda y de $A(k)$. Por último, suponemos que k y ω son reales con esta suposición excluimos los fenómenos disipativos. Estos desarrollos son pensados para las ondas elásticas en solidos sin embargo pueden ser fácilmente generalizados para otros tipos de ondas: electromagnéticas, De Broglie, etc.

El paquete de onda puede ser pensado como una función de probabilidad o bien como una distribución de masa, también sabemos que la densidad de energía por unidad de longitud del paquete en un instante t y posición x esta dada por $|\varphi(x,t)|^2$, luego es posible hallar el valor cuadrático medio, ancho del paquete, momentos de cualquier orden, de acuerdo las definiciones típicas de estas magnitudes.

Si $f(x)$ es la función densidad de probabilidad, se cumple que

- el valor medio es $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \bar{x}$
- el valor cuadrático medio es $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)dx = \overline{x^2}$
- desviación estándar $\sigma = \sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}$

Con la condición de que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Luego llamando E al resultado de la integral

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx$$

$$\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx = 1$$

Por tanto, el valor medio del paquete o posición del centro de masa del mismo que se moverá con el paquete cuando este evoluciona será

$$\bar{x}_c = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty} x \iint_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}A^*(\grave{k})\, e^{-i[\grave{k}x-\omega(\grave{k})t]}dkd\grave{k}dx$$

Ya que $|\varphi(x,t)|^2 = \varphi(x,t).\varphi(x,t)^*$ con el asterisco indicamos el complejo conjugado

$$\bar{x}_c = \frac{1}{2\pi E}\iint_{-\infty}^{\infty} A(k)A^*(\grave{k})e^{i[\omega(\grave{k})-\omega(k)]t}\, dkd\grave{k}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{i(k-\grave{k})x}dx =$$

Donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{i(k-\grave{k})x}dx = \frac{1}{i}\frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-\grave{k})x}dx$$

Remplazando

$$\bar{x}_c = \frac{1}{2\pi E}\iint_{-\infty}^{\infty} A(k)A^*(\grave{k})e^{i[\omega(\grave{k})-\omega(k)]t}\, dkd\grave{k}\frac{1}{i}\frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-\grave{k})x}dx =$$

y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-\grave{k})x}dx = 2\pi\delta(k-\grave{k})$$

Sustituyendo

$$\bar{x}_c = \frac{1}{2\pi E}\iint_{-\infty}^{\infty} A(k)A^*(\grave{k})e^{i[\omega(\grave{k})-\omega(k)]t}\frac{2\pi}{i}\frac{d}{dk}\delta(k-\grave{k})\, dkd\grave{k} =$$

$$= \frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(\grave{k})e^{i\omega(\grave{k})t}\, d\grave{k}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{-i\omega(k)t}\frac{d}{dk}\delta(k-\grave{k})dk$$

Integrando por partes la segunda integral, llamando

$$u = e^{-i\omega(k)t}A(k) \text{ y } dv = \frac{d}{dk}\delta(k-\grave{k})dk$$

$$du = \frac{d}{dk}\left[e^{-i\omega(k)t}A(k)\right]dk \text{ y } v = \int\frac{d}{dk}\delta(k-\grave{k})dk = \delta(k-\grave{k})$$

Luego

$$[uv]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} vdu = \left[e^{-i\omega(k)t}A(k)\delta(k-\grave{k})\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-\grave{k})\frac{d}{dk}\left[e^{-i\omega(k)t}A(k)\right]dk$$

La primera integral da cero mientras que la segunda teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\grave{x})dx = f(\acute{x})$$

Luego queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-\grave{k}) \frac{d}{dk}\left[e^{-i\omega(k)t}A(k)\right]dk = \frac{d}{d\acute{k}}\left[e^{-i\omega(\grave{k})t}A(\grave{k})\right]$$

$$\bar{x}_c = -\frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(\grave{k})e^{i\omega(\grave{k})t}\,d\grave{k}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\,e^{-i\omega(k)t}\frac{d}{dk}\delta(k-\grave{k})dk =$$

$$= -\frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(\grave{k})e^{i\omega(\grave{k})t}\frac{d}{d\acute{k}}\left[e^{-i\omega(\grave{k})t}A(\grave{k})\right]d\grave{k}$$

Como los k son todos con comas los puedo suprimir por comodidad.

$$\bar{x}_c = -\frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)e^{i\omega(k)t}\left[-itA(k)\frac{d\omega(k)}{dk}e^{-i\omega(k)t} + \frac{dA(k)}{dk}e^{-i\omega(k)t}\right]dk$$

$$\bar{x}_c = \frac{it}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)\,A(k)\frac{d\omega(k)}{dk}e^{-i\omega(k)t}e^{i\omega(k)t}dk + \frac{i}{E}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)\frac{dA(k)}{dk}e^{i\omega(k)t}e^{-i\omega(k)t}\,dk$$

$$\bar{x}_c = \frac{t}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2\frac{d\omega(k)}{dk}dk + \frac{i}{E}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)\frac{dA(k)}{dk}dk$$

Observamos que en estos dos términos uno depende directamente del tiempo, luego la posición media del paquete va cambiando, si el tiempo es cero la integral

$$\frac{i}{E}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)\frac{dA(k)}{dk}dk$$

Indica la posición media inicial del paquete $\bar{x}_c(t=0)$. El otro término sin el tiempo lo podemos interpretar como el valor medio de

$$\frac{d\omega(k)}{dk}$$

Observemos que tiene unidades de velocidad, luego es el valor medio de la velocidad del grupo, por tanto

$$\bar{c_g} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2\frac{d\omega(k)}{dk}dk$$

$$\bar{x}_c(t) = \bar{x}_c(t=0) + t\bar{c_g}$$

Si el medio no es dispersivo sabemos que todas las ondas tienen igual velocidad de propagación y es la velocidad de fase c, entonces

$$\omega(k) = ck$$

Luego

$$\bar{x}_c(t) = \bar{x}_c(t=0) + \frac{t}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2 \frac{d\omega(k)}{dk} dk =$$

$$\bar{x}_c(t) = \bar{x}_c(t=0) + \frac{ct}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2 \, dk$$

Luego para que se cumpla que el paquete se mueve sin deformar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x,t)|^2 dx = E$$

Lo cual es razonable si E es la energía pues es la suma de las amplitudes al cuadrado de las ondas, vemos también que es independiente del tiempo como fue supuesto tácitamente. Entonces

$$\bar{x}_c(t) = \bar{x}_c(t=0) + ct$$

4.6 Ondas dispersivas

El comentario realizado anterior respecto de la distinguibilidad de una onda que, al propagarse, puede distorsionarse, cambiar su velocidad, amplitud, siempre y cuando siga siendo reconocible, nos lleva a pensar en una clasificación de las mismas en: **ondas hiperbólicas** y **ondas dispersivas**

Una onda es **hiperbólica** si es posible modelarla por una ecuación diferencias hiperbólica, ejemplos típicos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + c\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

con c = constante, llamada ecuación Advectiva

Advección es la variación de un escalar en un punto por efecto de un campo vectorial. Por ejemplo: en el mar, el transporte de la salinidad, por las corrientes marinas.

O bien esta otra ecuación de ondas clásica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Ambas tienen solución del tipo $\varphi(x - ct)$

Las ondas **dispersivas** son más difíciles de clasificar que las hiperbólicas. La manera de clasificarlas es por el tipo de solución, en lugar de la ecuación a la que responden.

Hay muchos movimientos oscilatorios que no responden a ecuaciones de ondas hiperbólicos, estos pueden ser agrupados por que responden a ondas dispersivas.

Las ondas dispersivas para casos lineales elementales tienen la forma

$$\varphi(x,t) = A_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Pero para que sea solución de la ecuación diferencial es necesario que ω y k estén relacionadas por medio de una función $\omega = f(k_i)$ llamada relación de dispersión. Veamos los ejemplos siguientes para concretar las ideas.

Ejemplo

Partimos de la siguiente ecuación de la viga

$$\ddot{\varphi} + \gamma^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0$$

Probemos soluciones del tipo

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Encontrando las derivadas.

$$\ddot{\varphi} = i^2\omega^2 Ae^{i(kx-\omega t)} = (-i\omega)^2\varphi(x,t) = -\omega^2\varphi(x,t)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = i^4 k^4 Ae^{i(kx-\omega t)} = (ik)^4\varphi(x,t) = k^4\varphi(x,t)$$

Remplazando en la ecuación diferencial

$$\ddot{\varphi} - \gamma^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = (-\omega^2 + \gamma^2 k^4)\varphi(x,t) = 0$$

Luego para que tenga solución distinta de la trivial debe ser cero $(-\omega^2 + \gamma^2 k^4)$ que es la relación de dispersión. Los modos son

$$\omega_1 = \gamma k^2$$

$$\omega_2 = -\gamma k^2$$

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Luego la solución es

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\gamma k^2 t)} + Be^{i(kx+\gamma k^2 t)}$$

Primero se encuentra la relación de dispersión Una vez conocida la relación de dispersión podemos prescindir de la ecuación. También podemos construir la ecuación diferencial si conocemos la relación de dispersión

Tratemos de generalizar lo visto para introducir la relación de dispersión. Consideremos una ecuación diferencial en derivadas parciales con coeficientes constantes

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\varphi(x_i,t) = 0$$

Como de costumbre con x_i denotamos las tres componentes espaciales siendo, P un polinomio en las derivadas parciales y x_i. tratemos de encontrar soluciones del tipo

$$Ae^{i(k_i x_i - \omega t)}$$

Se ve que cada derivada respecto de t produce un factor $(-i\omega)$ y cada derivada respecto de x_i un factor (ik_i), recordemos estas propiedades que más adelante las utilizaremos luego:

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow (-i\omega) \;\; y \;\; \frac{\partial}{\partial x_i} \leftrightarrow (ik_i)$$

Cuando una onda plana es reemplazada en el polinomio P nos queda

$$P(-i\omega, ik_i)\varphi(x_i,t) = 0$$

Luego existirá solución del tipo onda viajera si y solamente si ω y k están relacionadas de manera que anulen el polinomio $P(-i\omega, ik_i)$. La relación es llamada relación de dispersión, en general hay varias soluciones de este tipo y son llamadas modos.

Sabemos que la cantidad $\theta = k_i x_i - \omega t$ es la fase, en el caso de soluciones tipo ondas planas $\theta = k_i x_i - \omega t = cte$ son planos paralelos y sabemos que se desplazan con velocidad normal $c_i = \frac{\omega}{k}\breve{k}$ donde $\breve{k}$ es el versor que indica la dirección de propagación. La otra velocidad es la de grupo que se la define

$$c_g = \vec{\nabla}_k \omega$$

Las soluciones armónicas son dispersivas si $\vec{c} \neq \overrightarrow{c_g}$ o bien

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \neq cte \quad \text{esto es} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \neq 0$$

En general la ecuación de onda es dispersiva si $f(k)$ es real y el determinante

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial k_i \partial k_j}\right| \neq 0$$

Ejemplo

Partamos de la siguiente ecuación diferencial Advectiva

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Busquemos soluciones del tipo $\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ reemplazando en la ecuación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ik\varphi \quad \text{y} \quad a\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -ai\omega\varphi$$

$$ik\varphi - ai\omega\varphi = (k - a\omega)\varphi = 0$$

Donde el paréntesis debe ser cero para que haya solución no trivial, luego es la **relación de dispersión**

$$\omega = \frac{k}{a} \quad \text{y} \quad \text{por tanto}$$

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i(kx-\frac{k}{a}t)}$$

Que es la solución. Si calculamos la velocidad de grupo

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{a}$$

Por otro lado, la velocidad de fase es

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{k}{ak} = \frac{1}{a}$$

Luego no es dispersiva, a tiene unidades de lentitud.

Ejemplo

La ecuación de Klein-Gordon para una dimensión es

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \propto^2 \varphi = 0$$

Donde $\propto$ es una constante generalmente positiva, luego

$$[(-i\omega)^2 - a^2(ik)^2 + \propto^2]\varphi = 0$$

$-\omega^2 + a^2k^2 + \propto^2 = 0$ luego la relación de dispersión es

$\omega^2 = a^2k^2 + \propto^2$ por tanto, la velocidad de fase es $c_\pm = \frac{\omega_\pm}{k} = \pm\sqrt{a^2 + \frac{\propto^2}{k^2}}$

La velocidad de grupo es

$$c_{\pm g} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{a^2k}{\omega_\pm} = \frac{a^2}{c_\pm}$$

Vemos que si $\alpha = 0$ nos queda la ecuación de onda común, luego $a = c$

Ejemplo

Veamos el caso de la ecuación del telegrafista ya vista en capítulo I

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Por tanto

$$[(-i\omega)^2 - c^2(ik)^2 + \delta(-i\omega)]\varphi = 0$$

La solución no trivial es,

$$-\omega^2 - i\delta\omega + c^2k^2 = 0$$

Hallando las dos raíces

$$\omega_\pm = \frac{i\delta \mp \sqrt{(-i\delta)^2 - 4(-1)c^2k^2}}{-2} = -\frac{i\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\delta^2 + 4c^2k^2} =$$

$$\omega_\pm = -\frac{i\delta}{2} \pm ck\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4c^2k^2}}$$

Para que la frecuencia no sea imaginaria pura debe ser

$$1 > \frac{\delta^2}{4c^2k^2}$$

luego la velocidad de fase y de grupo son respectivamente

$$c_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{k} = -\frac{i\delta}{2k} \pm c\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4c^2k^2}}$$

$$c_g = \frac{2c^2k}{\pm\sqrt{-\delta^2 + 4c^2k^2}}$$

Vemos que tanto ω como k son complejos representando la disipación o perdida de energía en el tiempo o con la distancia respectivamente.

$$k = \frac{\omega_{\pm}}{c} = -\frac{i\delta}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{-\delta^2 + 4c^2k^2} = -\frac{i\delta}{2c} \pm k\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4\omega^2}}$$

Si δ es pequeño más aun su cuadrado, luego k es complejo, reemplazando en una de las soluciones queda

$$\varphi(x,t) = Ae^{i\left[\left(-\frac{i\delta}{2c}+k\right)x-\omega t\right]} = Ae^{-\frac{\delta}{2c}x}e^{i(kx-\omega t)}$$

La onda se amortigua con la distancia

Ejercicio

La relación de dispersión de una onda es $-\omega + \alpha k - \beta k^3 = 0$. Encuentre la ecuación diferencial de la que proviene.

$$(-\omega + \alpha k - \beta k^3)\varphi = (-i\omega + i\alpha k - i\beta k^3)\varphi = 0$$

Y como

$$-i\omega = \frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$

$$i\alpha k = \alpha\frac{\partial}{\partial k}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$

$$-i\beta k^3 = \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(Ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$

Reemplazando en la relación de dispersión

$$(-i\omega + i\alpha k - i\beta k^3)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = 0$$

Obteniendo la ecuación deferencial lineal de Korteweg de Vries

Ejercicio

Ecuación de Schrödinger

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}+\Delta\varphi=\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{x}_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{x}_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathrm{x}_3^2}=0$$

$$[\mathrm{i}(\mathrm{i}\omega)+(\mathrm{i}\mathrm{k}_1)^2+(\mathrm{i}\mathrm{k}_2)^2+(\mathrm{i}\mathrm{k}_3)^2]\varphi(\mathrm{t},\mathrm{x}_\mathrm{i})=0$$

$$\omega-\mathrm{k}_1^2-\mathrm{k}_2^2-\mathrm{k}_3^2=0$$

La velocidad de fase es

$$\mathrm{c}_\mathrm{i}=\frac{\omega}{\mathrm{k}_\mathrm{i}}=(\mathrm{k}_1;\mathrm{k}_2;\mathrm{k}_3)$$

La velocidad de grupo es

$$c_g=\vec{\nabla}_k\omega=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_1};\frac{\partial\omega}{\partial k_2};\frac{\partial\omega}{\partial k_3}\right)=2(k_1;k_2;k_3)$$

Ejercicio

Estudiar la ecuación

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

La relación de dispersión es

$$-(ik)^2+(ik)+(i\omega)=0$$

$$k^2+ik+i\omega=0$$

$$\omega=-k+ik^2$$

$$c=-1+ik \quad \text{y} \quad c_g=\frac{d\omega}{dk}=-1+2ik$$

Como la derivada respecto al tiempo en la ecuación diferencial es de primer orden tenemos una sola expresión de ω, luego la solución con ondas armónica será

$$\varphi(x,t)=Ae^{i(xk+\omega(k)t)}=Ae^{i(xk+(-k+ik^2)t)}=Ae^{-k^2t}e^{ik(x-t)}$$

La onda se disipa con el correr del tiempo.

Repitamos una vez más el concepto de onda dispersiva, "Si la frecuencia ω es una función real del número de onda k", decimos que la onda es dispersiva. A esta función se la suele llamar $w(k)$, cuya dependencia funcional obedece a las características del sistema. Algunos textos modifican esta definición de

$$\frac{dw(k)}{dk} \text{ no es constante o bien } \frac{d^2w}{dk^2} \neq 0$$

Esta modificación excluye el caso común de $\omega = ck$.

Se ve que existen soluciones del tipo

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

para ecuaciones diferenciales que no son la de onda. Dicho de otro modo, las ondas viajeras no son solo solución de ecuaciones hiperbólicas.

4.7 Medios dispersivos normal y anómalos

Si el **medio es normal** el cambio de la velocidad de fase con la longitud de onda es positivo $\frac{dc}{d\lambda} > 0$ como $c_g = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}$ por tanto $c_g < c$. Fig.4.1

Si el **medio es anómalo** $\frac{dc}{d\lambda} < 0$ luego $c_g > c$. Se debe aclarar qué los términos normal y anormal son meramente arbitrarios solo indican diferencias. Fig.4.2

La relación entre la frecuencia temporal ω y la frecuencia espacial k ,es la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Si la relación de dispersión es lineal con k, todos los modos tienen igual velocidad y la energía de la onda se propaga de forma homogénea (medio no dispersivo). Si la relación no es lineal la velocidad de los distintos modos es diferente luego la energía no se propaga homogéneamente, la energía es dispersada.

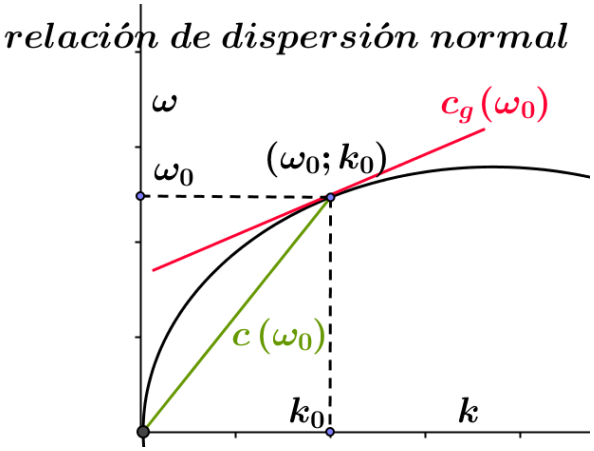


Fig.4.1

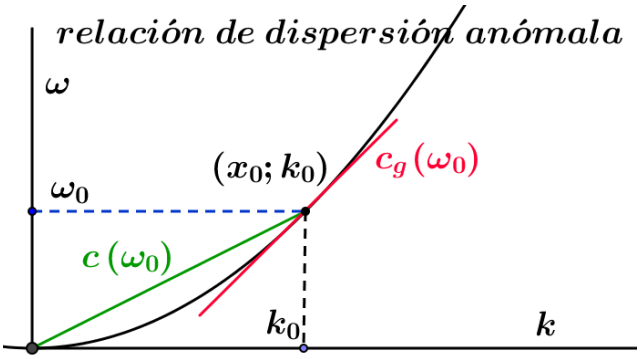


Fig.4.2

El concepto de dispersión nos hizo repensar la definición de onda, también debemos precisar la idea de frecuencia y número de onda en los casos de paquetes, lo cual permitirá la extensión de los razonamientos a procesos no lineales, aunque no serán tratados en este apunte.

En algunos casos no es simple encontrar la relación de dispersión como una función explicita $\omega = \mathrm{f}(k_i)$, luego la determinación de la velocidad de grupo se complica. En este caso es conveniente trabajar con la función de dispersión implícita

$$\Omega(\omega, k_1, k_2, k_3) = \Omega(\omega, k_i) = \Omega(\mathrm{f}(k_i), k_i) = 0$$

Derivando de manera implícita para cada componente

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} dk_i\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} d\omega = -\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} dk_i$$

Luego la velocidad de grupo será

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \vec{c}_g = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}}$$

Si bien lo desarrollado hasta ahora puede ser aplicado a las ondas elásticas tiene un carácter más general. Tratamos ahora de llegar a resultados equivalentes de aplicación específica en ondas elásticas en sólidos. En el párrafo donde se demostró la igual de la energía potencial y cinética (párrafo 3.9), reemplazando en la ecuación de movimiento la solución armónica se llegó

$$C_{ijkl} A k^2 \alpha_k l_l l_j e^{i[k(l_i x_i) - \omega t]} = \rho A \alpha_i \omega^2 e^{i[k(l_i x_i) - \omega t]}$$

Simplificando y multiplicando por α_i en ambos miembros

$$C_{ijkl}k^2\alpha_k\alpha_i l_l l_j = \rho\alpha_i\alpha_i\omega^2$$

Despejando ω^2

$$\omega^2 = \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i(kl_l)(kl_j)}{\rho} = \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i}{\rho}k_l k_j$$

Para encontrar la velocidad de grupo derivamos ω respectoa k_q,

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial k_q} = \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i}{\rho}\left[\delta_{lq}k_j + \delta_{jq}k_l\right]$$

$$2\omega\frac{\partial\omega}{\partial k_q} = \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i}{\rho}\delta_{lq}k_j + \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i}{\rho}\delta_{jq}k_l = \frac{C_{ijkq}\alpha_k\alpha_i k_j}{\rho} + \frac{C_{iqkl}\alpha_k\alpha_i k_l}{\rho}$$

Tratemos de igualar estos dos sumandos para ello Cambiando k por i

$$\frac{C_{iqkl}\alpha_k\alpha_i k_l}{\rho} \rightarrow \frac{C_{kqil}\alpha_i\alpha_k k_l}{\rho}$$

Luego l por j

$$\frac{C_{kqil}\alpha_i\alpha_k k_l}{\rho} \rightarrow \frac{C_{kqij}\alpha_i\alpha_k k_j}{\rho}$$

Por simetría del tensor de las constantes elásticas

$$C_{kqij} = C_{ijkq}$$

$$\frac{C_{kqij}\alpha_i\alpha_k k_j}{\rho} = \frac{C_{ijkq}\alpha_i\alpha_k k_j}{\rho}$$

Luego remplazando

$$2\omega\frac{\partial\omega}{\partial k_q} = \frac{C_{ijkq}\alpha_k\alpha_i k_j}{\rho} + \frac{C_{iqkl}\alpha_k\alpha_i k_l}{\rho} = 2\frac{C_{ijkq}\alpha_i\alpha_k k_j}{\rho}$$

Por tanto, la componente q de la velocidad de grupo es,

$$c_{gq} = \frac{\partial\omega}{\partial k_q} = \frac{C_{ijkq}\alpha_i\alpha_k l_j}{\rho c}$$

Nótese que se pasó a modulo el vector k_j .Obteniéndose en definitiva la velocidad de grupo para una onda armónica en función de las constantes elásticas del medio.

Nuevamente partiendo de la expresión

$$C_{ijkl}k^2\alpha_k\alpha_i l_l l_j = \rho\alpha_i\alpha_i\omega^2$$

Multiplicada por α_i , en este caso tratando de despejar c^2

$$C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i l_l l_j = c^2\rho$$

$$c = \frac{C_{ijkl}\alpha_k\alpha_i l_j}{c\rho} l_l$$

Observamos que el cociente es la velocidad de grupo, luego

$$c = \vec{c}_g.\vec{l} = c_{gl}l_l = |c_g||l|\cos\eta = |c_g|\cos\eta$$

Vemos entonces que la proyección de la velocidad de grupo en la dirección de propagación de la onda es la velocidad de fase.Fig.4.3

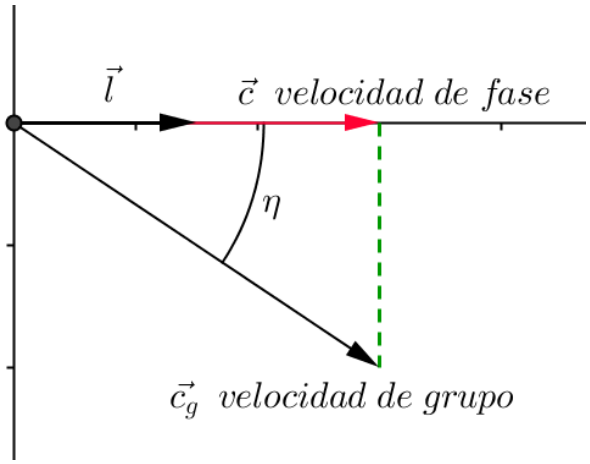


Fig.4.3

Luego la velocidad de fase no puede ser mayor que la velocidad de grupo

4.8 Gráficas y algo más

En general se trabaja con tres tipos de gráficas que son el lugar geométrico determinado por un vector en función de la dirección de propagación:

Superficie de la velocidad de fase; lugar geométrico determinado por el vector velocidad de fase $\vec{c}$ en función de la dirección de propagación $\breve{n}$, luego. $\vec{c} = c\breve{l}$

Superficie de lentitud; lugar geométrico determinado por el vector lentitud $\vec{m} = \frac{1}{c}\breve{l}$ en función de la dirección de propagación. La velocidad de grupo en el punto P es la normal a la superficie de lentitud.

Superficie velocidad de grupo; lugar geométrico determinado por el vector velocidad de grupo c_g en función de la dirección de propagación. Esta superficie también es llamada superficie del rayo.

Ejercicio

Demostrar que el gradiente de una función, en cada de la misma, punto es perpendicular a la superficie de nivel de esta.

Tenemos la función $\Omega(k_i)$ la superficie de nivel será $\Omega(x_i) = const.$ Luego

$$d\Omega(k_i) = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} dk_i = \vec{\nabla}_k \Omega(k_i) d\vec{k} = 0$$

En un punto fijo los desplazamientos sobre la curva de nivel son arbitrarios, luego

siempre es

$$\vec{\nabla}_k(k_i) \perp d\vec{r}$$

Tengamos en cuenta que el gradiente es tomado, aun cuando no lo indiquemos, respecto a la variable k_i , por tanto, el k como subíndice indica respecto a que coordenada se toma el gradiente

Ejercicio

Verificar que $\vec{c}_g$ es perpendicular a $f(k_i)$

En este caso $\Omega(k_i, \omega) = 0$ luego, sabemos que $\vec{\nabla}_k(k_i) \perp$ a la curva de nivel o sea perpendicular a la tangente a la curva, pero $\Omega(k_i, \omega) = f(k_i) - \omega = 0$

$$\vec{\nabla}_k \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} = \frac{\partial (f(k_i) - \omega)}{\partial k_i} = \frac{\partial f(k_i)}{\partial k_i} = \vec{\nabla}_k f(k_i)$$

Luego $\vec{\nabla}_k f(k_i) = \vec{c}_g$ es $\perp$ a $f(k_i) = \omega$

Ejercicio

Demostrar que $\vec{\nabla}_m f(k_i) = \omega \vec{c}_g$

Cambiando de variable a la función $f(k_i)$

$$\frac{\partial f(k_i)}{\partial m_i} = \frac{\partial f(k_i)}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial m_i}$$

Pero $k_i = \frac{\omega}{c} l_i = \omega m_i$, luego $\frac{\partial k_i}{\partial m_i} = \omega$ y $\frac{\partial f(k_i)}{\partial k_i} = \vec{\nabla}_k f(k_i)$ por tanto queda

$$\vec{\nabla}_m f(k_i) = \omega\, \vec{\nabla}_k f(k_i) = \omega \vec{c}_g$$

También podemos ver multiplicando por dm_i

$$\vec{\nabla}_m f(k_i) dm_i = \vec{\nabla}_k f(k_i) \omega dm_i = \vec{\nabla}_k f(k_i) dk_i = 0$$

Como los desplazamientos son arbitrarios entonces

$$\vec{\nabla}_m f(k_i) \perp dm_i \rightarrow \vec{\nabla}_m f(k_i) \perp tg\ de\ f(m_i)$$

4.9 Alternativas para hallar la velocidad de grupo

1. Si la función de dispersión esta de manera explícita se usa la definición
$$c_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$$
2. Si la función de dispersión es implícita
$$\vec{c}_g = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}}$$
3. O bien
$$c_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \frac{\partial (kc)}{\partial k_i} = \left(\frac{\partial (kc)}{\partial k_1}, \frac{\partial (kc)}{\partial k_2}, \frac{\partial (kc)}{\partial k_3}\right)$$
4. Otro caso
$$\Omega(\omega, k_i) = \Omega(\omega, \omega m_i) = F(\omega, m_i)$$
$$\vec{\nabla} k\Omega = \vec{\nabla}_k \mathrm{F} = \vec{\nabla}_m F \frac{\partial m}{\partial k_i} = \frac{1}{\omega}\vec{\nabla}_m F$$
Por otro lado

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = \vec{\nabla}_m F \frac{\partial m}{\partial \omega} = \vec{\nabla}_m F \left(-\frac{k_i}{\omega^2}\right) = \vec{\nabla}_m F \left(-\frac{m_i}{\omega}\right)$$

Remplazando en

$$\vec{c}_g = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}} = -\frac{\frac{1}{\omega}\vec{\nabla}_m F}{\left(-\frac{m_i}{\omega}\right)\vec{\nabla}_m F} = \frac{\vec{\nabla}_m F}{\vec{m}.\vec{\nabla}_m F}$$

Como el gradiente es perpendicular a la superficie de nivel. Llamamos $\hat{n}$ al versor normal a la superficie de lentitud, los módulos del gradiente se simplifican

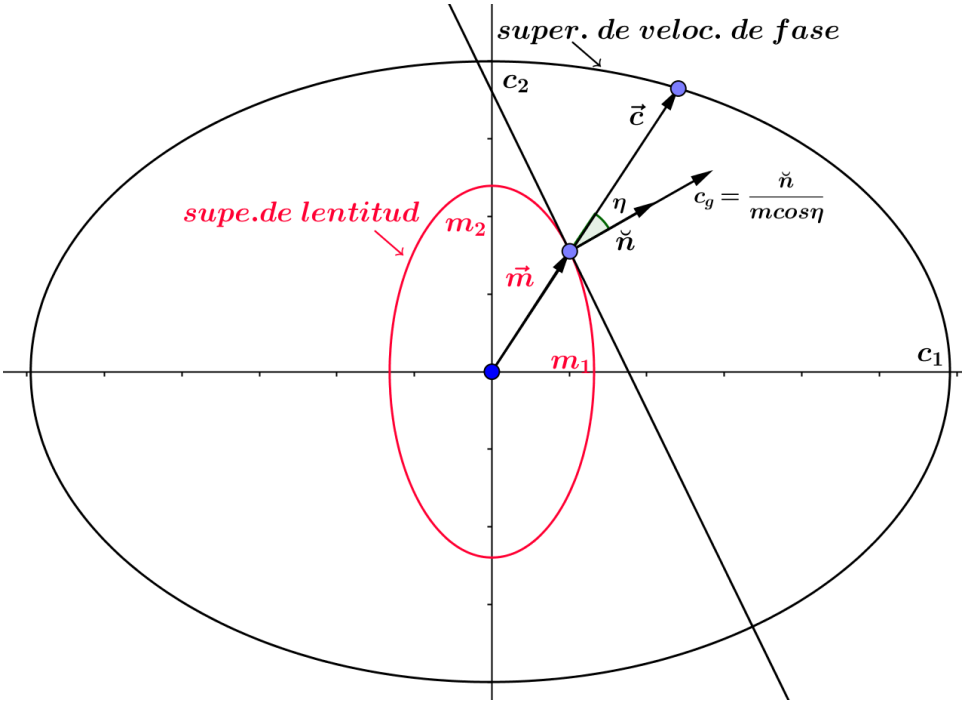


Fig.4.4

$$\vec{c}_g = \frac{\vec{\nabla}_m F}{\vec{m}.\vec{\nabla}_m F} = \frac{\hat{n}}{m\cos(\vec{m}\check{n})} = \frac{\hat{n}}{\vec{m}\hat{n}} = \frac{c\hat{n}}{\cos\eta}$$

Que es una expresión ya encontrada.

La grafica siguiente Fig.4.4 es tan solo un esquema donde se observa la velocidad de fase y la de lentitud.

4.10 Significado físico de la velocidad de grupo

Para encontrar el significad físico de una magnitud lo común es relacionar, la magnitud, con la energía. En un párrafo anterior se encontró la densidad de energía para una onda harmónica en un determinado volumen

$$E = A^2\omega^2\rho e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

También se estableció para una onda harmónica la densidad de flujo de energía que atraviesa la superficie del volumen

$$\Phi_i = -A^2\omega C_{ijkl}kl_l\alpha_j\alpha_k e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}$$

Tratemos ahora de comparar los valores medios temporales del flujo de energía de la onda para un ciclo con respecto al valor medio temporal de la de energía también en un ciclo

$$\frac{\int_0^T \Phi_i dt}{\int_0^T E dt} = \frac{\int_0^T A^2\omega C_{ijkl}kl_l\alpha_j\alpha_k e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}dt}{\int_0^T A^2\omega^2\rho e^{2i[k(l_i x_i)-\omega t]}dt} =$$

Simplificando

$$= \frac{A^2\omega C_{ijkl}kl_l\alpha_j\alpha_k}{A^2\omega^2\rho} = \frac{C_{ijkl}l_l\alpha_j\alpha_k}{\rho c}$$

Que no es otra cosa que la velocidad de grupo**, lo cual nos indica que la energía se propaga con la velocidad de grupo $\vec{c}_g = \vec{c}_E$**

4.11 Frecuencia y número de onda

Anteriormente se comentó las dificultades para hallar la frecuencia y en número de onda en un paquete dispersivo. Comencemos con una onda armónica no dispersiva

$$\varphi(x_i, t) = Ae^{i(k_i x_i-\omega t)}$$

Llamando a la fase $\Phi = k_i x_i - \omega t$, se ve que

$$\omega = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \text{ y } k_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \vec{\nabla}\Phi$$

Por el contrario, si el medio es dispersivo hay una relación entre ω y k llamada relación de dispersión $\omega = f(k_i)$ como se vio, esta función da cuenta de cómo se deforma el paquete en su movimiento.

En el paquete se puede identificar un pico con amplitud máxima local, cuya coordenada son (x_{i0}, t_0), luego desarrollando la función alrededor de este punto

$$\Phi(x_i, t) = \Phi(x_{i0}, t_0) + (x_{i0} - x_0)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x_i}}\Big|_{x_{i0}, t_0} + (t - t_0)\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{x_{i0}, t_0} + \cdots$$

La posición del pico siguiente al mismo tiempo estará en $(x_{2\pi,} t_0)$, de tal manera que

$$\Phi(x_{i2\pi}, t) = \Phi(x_{i0}, t_0) + 2\pi$$

Luego la primera seudo-longitud será

$$\lambda_{i0} \approx (x_{i2\pi} - x_{i0}) = \frac{2\pi}{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x_i}}\Big|_{x_{i0}, t_0}}$$

de igual modo calculamos el seudo-periodo

$$T_0 \approx (t_{2\pi} - t) = \frac{2\pi}{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{x_{i0}, t_0}}$$

Nuevamente tenemos

$$\omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}} \text{ y } \mathrm{k_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x_i}} = \vec{\nabla}\Phi$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x_i} = \frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{x_i}} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{x_i}} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial}{x_i}(c k_i) = 0$$

Si la onda es dispersiva entonces existe una función de dispersión que la habíamos llamado $\omega = w(k_i)$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{x_i}} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{k_i}}\frac{\partial k_i}{\partial x_i} = 0$$

Como la velocidad de grupo es

$$c_{gi} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$$

Entonces

$$\frac{\partial k_n}{\partial t} + c_{gi}\frac{\partial k_n}{\partial x_i} = 0$$

Hallamos una ecuación similar a la ecuación de continuidad para cada una de las componentes del número de onda k_n

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} + c_{gi}\frac{\partial k_1}{\partial x_i} = \frac{\partial k_1}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{c}_g k_1) = 0 \quad \text{Para una componente}$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{c}_g k_n) = 0 \quad \text{En general}$$

Donde $\vec{c}_g$ se puede interpretar como la velocidad de transporte que es la velocidad de grupo, luego, esta transporta el número de onda o sea el paquete, por tanto, el número de onda es constante.

4.12 Fourier aplicado a la ecuación de onda, problema de condiciones iniciales

Anteriormente se llegó a

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk$$

Conociendo las condiciones iniciales

$$\varphi(x,0) \text{ y } \left.\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

Es posible encontrar la solución del problema

Como anteriormente supusimos ni k ni ω son complejas no consideramos casos disipativos, si puede ser complejo $A(k)$ ya que recordemos que puede contener las diferentes fases iniciales de las ondas. Tomando la parte real de $\varphi(x,t)$

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)] = \varphi(x,t) + \varphi^*(x,t)$$

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)e^{-i(kx-\omega(k)t)}dk$$

Aplicando la primera condición inicial

$$2\sqrt{2\pi}\mathcal{R}[\varphi(x,0)] = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx)}dk + \int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)e^{-i(kx)}dk$$

La segunda condición

$$2\sqrt{2\pi}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\big(-i\omega(k)\big)A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk + \int_{-\infty}^{\infty}\big(i\omega(k)\big)A^*(k)e^{-i(kx-\omega(k)t)}dk$$

$$2\sqrt{2\pi}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -i\omega(k)\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx)}dk + i\omega(k)\int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)e^{-i(kx)}dk$$

$$\frac{2\sqrt{2\pi}}{i\omega(k)}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx)}dk + \int_{-\infty}^{\infty} A^*(k)e^{-i(kx)}dk$$

Operando con la primera condición inicial

$$2\sqrt{2\pi}\mathcal{R}[\varphi(x,0)] - \frac{2\sqrt{2\pi}}{i\omega(k)}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 2\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx)}dk$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx)}dk = \mathcal{R}[\varphi(x,0)] + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

Luego a anti transformada me da $A(k)$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathcal{R}[\varphi(x,0)] + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0} e^{-i(kx)}dx\right\}$$

Vemos que es necesario conocer la función de dispersión $\omega(k)$

Ejercicio

Plantear el problema de valores iniciales con $\varphi(x,0) = e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)}\cos(k_0 x)$, una oscilación modulada por una gaussiana y $\frac{\partial\mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, partimos de

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{R}[\varphi(x,0)] + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial \mathcal{R}[\varphi(x,t)]}{\partial t}\bigg|_{t=0} e^{-i(kx)} dx \right\}$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)} \cos(k_0 x)\, e^{-i(kx)} dx$$

Como

$$\cos(k_0 x) = \frac{1}{2}\left(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}\right)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)} \left(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}\right) e^{-i(kx)} dx$$

$$A(k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)} \left(e^{i(k_0 - k)x} + e^{-i(k_0 + k)x}\right) dx$$

Separamos la suma en dos integrales, trabajamos solo con la primera de ellas, la segunda se calcula de manera equivalente

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)} \left(e^{i(k_0 - k)x}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right) + i(k_0 - k)x} dx$$

Tomamos el exponente, completamos cuadrado de manera de obtener un binomio al cuadrado negativo

$$-\left[\left(\frac{x^2}{2L^2}\right) - i(k_0 - k)x\right] = -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}L} - \frac{\sqrt{2}}{2} iL(k_0 - k)\right)^2 + \frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right]$$

Remplazando en la integral

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right) + i(k_0 - k)x} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}L} - \frac{\sqrt{2}}{2} iL(k_0 - k)\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Llamando $u = \frac{x}{\sqrt{2}L} - \frac{\sqrt{2}}{2} iL(k_0 - k)$ y entonces $du = \frac{dx}{\sqrt{2}L}$ por tanto la integral queda

$$\frac{\sqrt{2}L}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{L}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right)} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{L}{2} e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0 - k)^2\right)}$$

Ya que la función que integro es par y recordando que

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Luego el resultado total teniendo en cuenta la segunda integral es

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)} \cos(k_0 x)\, e^{-i(kx)} dx = \frac{L}{2}\left[e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0-k)^2\right)} + e^{-\left(\frac{L^2}{2}(k_0+k)^2\right)} \right]$$

Este valor de $A(k)$ debe ser remplazado en la expresión de la función de onda

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

Donde vemos que para llegar a la solución final se debe conocer la función de dispersión $\omega(k)$.

Ejercicio

Partiendo de $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$ con la condición inicial $\varphi(x,0) = \xi(x)$ y con $\frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ hallar la solución de D´Alambert para un medio no dispersivo.

Recordemos:

- que la solución física del problema es

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)] = \varphi(x,t) + \varphi^*(x,t)$$

- también que

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [\varphi(x,0)] + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\Big|_{t=0} e^{-i(kx)} dx \right\}$$

Luego

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) e^{-i(kx)} dx \right] e^{i(kx-\omega t)} dk =$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{\xi}(k) e^{-ik(ct)} \right] e^{i(kx)} dk$$

Donde $\hat{\xi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) e^{-i(kx)} dx$ es la transformada de Fourier de $\xi(x)$.

Recordando que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x-a)e^{-i(kx)}dx=\hat{\xi}(k)e^{-ik(a)}$ propiedad del desplazamiento

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x-ct)e^{-i(kx)}dx\right]e^{i(kx)}dk=\xi(x-ct)$$

Mientras que

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)e^{i(kx)}dx\right]e^{-i(kx)+i(\omega t)}dk$$

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)e^{-i(kx)}dx\right]e^{i(kx+\omega t)}dk$$

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\xi}(k)e^{-ik(-ct)}e^{i(kx)}dk$$

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x-ct)e^{-i(-ct)}dx\right]e^{i(kx)}dk=\xi(x+ct)$$

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\varphi(x,t)+\varphi^*(x,t)$$

$$\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\frac{1}{2}[\xi(x-ct)+\xi(x+ct)]$$

Ejercicio

En el ejercicio anterior supusimos que $\left.\frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\right|_{t=0}=0$, tratamos ahora de resolver la segunda parte de la solución de D´Alambert donde la velocidad inicial no es cero $\left.\frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$, caso no dispersivo, como anterior partimos de

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\varphi(x,t)+\varphi^*(x,t)$$

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(k)e^{-i(kx-\omega(k)t)}dk$$

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{[\varphi(x,0)]+\frac{i}{\omega}\left.\frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\right|_{t=0}e^{-i(kx)}dx\right\}$$

En principio trabajamos con la primera integral

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk$$

Como

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \psi(x) e^{-ikx} dx \right] e^{i(kx-\omega t)} dk =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \psi(x) e^{-ikx} dx \right] e^{i(kx-\omega t)} dk =$$

$$\frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{k} \Psi(k) e^{ikx-ikct} dk = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{k} e^{-ikct} \Psi(k) e^{ikx} dk$$

Sabemos que

$$\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x) \right) = \frac{i}{k}$$

En el integrando tenemos

$$\frac{i}{k} e^{-ikct} = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x) \right) e^{-ikct}$$

Recordando la propiedad de translación en el espacio

$$\frac{i}{k} e^{-ikct} = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x - ct) \right)$$

Reemplazando

$$\frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x - ct) \right) \mathcal{F}\big(\psi(x)\big) e^{ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{c} \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x - ct) \right) \mathcal{F}\big(\psi(x)\big) \right] = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} Sig(x - ct) \right) * \mathcal{F}\big(\psi(x)\big)$$

Que es la convolución de las dos funciones

$$\frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\big(Sig(x - ct)\big) \mathcal{F}\big(\psi(x)\big) e^{ikx} dk = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} Sig(x - ct - u) \psi(u) du$$

La función $Sig(x - ct)$ es para este caso

$$Sig(x-ct)=\begin{cases}-1\ si\ s>x\mp ct\\ 0\ si\ s=0\\ 1\ si\ s<x\mp ct\end{cases}$$

Luego tenemos

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{2c}\left[-\int_{-\infty}^{x-ct}\psi(u)du+\int_{x-ct}^{\infty}\psi(u)du+\right]$$

Dejamos por un momento esta primera integrar con la que comenzamos a trabajar y continuemos con la segunda que es la conjugada de la primera

$$\varphi^*(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A^*(k)e^{-i(kx-\omega t)}dk$$

Donde

$$A^*(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i}{\omega}\psi(x)e^{ikx}dx$$

Suponiendo $\psi(x)$ real y reemplazando como se hizo anteriormente

$$\varphi^*(x,t)=-\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{k}e^{ikct}\ \Psi(k)e^{ikx}dk$$

Como

$$\frac{i}{k}e^{-ik(-ct)}=\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Sig(x+ct)\right)$$

Luego

$$\varphi^*(x,t)=-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}Sig(x+ct-u)\psi(u)du=$$

$$=\frac{1}{2c}\left[\int_{-\infty}^{x+ct}\psi(u)du-\int_{x+ct}^{\infty}\psi(u)du+\right]$$

Recordando que

$$2\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\varphi(x,t)+\varphi^*(x,t)$$

$$\mathcal{R}[\varphi(x,t)]=\frac{1}{4c}\left[-\int_{-\infty}^{x-ct}\psi(u)du+\int_{x-ct}^{\infty}\psi(u)du+\int_{-\infty}^{x+ct}\psi(u)du-\int_{x+ct}^{\infty}\psi(u)du\right]=$$

$$\frac{1}{4c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(u)du+\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(u)du\right]=$$

$$\mathcal{R}[\varphi(x,t)] = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(u)du$$

Que es lo que queríamos demostrar

Ejercicio

Demostrar que si $\varphi(x,0) = \xi(x)$ es real y $\left.\frac{\partial[\varphi(x,t)]}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = 0$ entonces la componente real de $A(k)$ es una función par de k.

Primero demostraremos la propiedad llamada de simetría conjugada

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)e^{-ikx}dx$$

Luego

$$A^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^*(x)e^{ikx}dx$$

Pero $\xi(x) = \xi^*(x)$

$$A^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, e^{-i(-k)x}dx = A(-k)$$

$$A^*(k) = A(-k)$$

Que es la propiedad de simetría conjugada. Si expresamos la función compleja $A(k)$ en forma binomial

$$A(k) = \mathcal{R}[A(k)] + i\mathcal{I}[A(k)]$$

Conjugando

$$A^*(k) = \mathcal{R}[A(k)] - i\mathcal{I}[A(k)] = \mathcal{R}[A(-k)] + i\mathcal{I}[A(-k)]$$

Luego

$$\mathcal{R}[A(k)] = \mathcal{R}[A(-k)] \text{ Función par}$$

$$-\mathcal{I}[A(k)] = \mathcal{I}[A(-k)] \text{ Función impar}$$

Este resultado nos indica que si la función $\varphi(x,0) = \xi(x)$ es real solo es necesario conocer las funciones $\mathcal{R}[A(k)]$ y $\mathcal{I}[A(k)]$ para $k > 0$.

Ejercicio

Demostrar que si la condición inicial $\varphi(x,0) = \xi(x)$ es, a parte real y par entonces $A(k)$ también será real y par

$$A(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, e^{ikx} dx$$

Reemplazando x por $-u$ y como $\xi(u)$ es par

$$A(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(-u)\, e^{-iku} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(u)\, e^{-iku} dx = A(k)$$

Luego $A(k)$ es también par, como $\xi(x)$ se cumple que

$$A^*(k) = A(-k) = A(k)$$

por tanto, también es real.

5

"La incertidumbre es incómoda,
pero la certidumbre es absurda."
Voltaire

Capítulo 5 - SÓLIDOS ANISÓTROPOS

5.1 Ondas en medios anisótropos

Anteriormente llegamos

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

Que es la segunda ley de Newton para medios continuos, sin fuerzas de volumen y suponiendo linealidad entre tensiones y deformaciones

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Tratemos ahora de escribir la ecuación de onda de otra forma, con el fin de que nos resulte más práctica para trabajar con ondas armónicas.

Derivando respecto de j con el objeto de remplazar en la ecuación de Newton

$$\sigma_{ij,j} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}$$
$$\varepsilon_{kl,j} = \frac{1}{2}(u_{l,kj} + u_{k,lj})$$

Remplazando

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} = C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{l,kj} + u_{k,lj}\right) = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

Luego

$$C_{ijkl}u_{l,kj} + C_{ijkl}u_{k,lj} = 2\rho \frac{dv_i}{dt}$$

Como

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

Partimos

$C_{ijkl}u_{l,kj}$ Cambiando l por k

$$C_{ijlk}u_{k,lj} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Luego la ecuación de ondas para un medio lineal no isótropo es

$$C_{ijkl}u_{k,lj} - \rho\ddot{u}_i = 0$$

Supongamos soluciones armónicas del tipo

$$u_i = A_{0i}e^{i[\vec{k}\vec{x}-\omega t]} = A_{0i}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} \quad \text{con} \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3) = k\vec{l}$$

Atención trabajamos con dos (i) distintos, i subíndice e i unidad imaginaria

Donde A_{0i} es el vector de polarización. Haciendo las derivadas

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (-\omega i)^2 A_{0i}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} = \omega^2 A_{0i}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Para realizar la derivada espacial cambio i por k

Atención diferencial k número de onda de k subíndice

$$u_k = A_{0k}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

La derivada primera será

$$u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial u_l} = A_{0k}ikl_n\frac{\partial x_n}{\partial x_l}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} = A_{0k}ikl_n\delta_{nl}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$
$$= A_{0k}(ikl_l)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Con la derivada segunda queda

$$u_{k,lj} = A_{0k}(ikl_l)(ikl_j)e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} = -A_{0k}k^2 l_l l_j e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]}$$

Remplazando en la ecuación de onda y simplificando

$$C_{ijkl}\left(k^2 l_l l_j\right)A_{0k}e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} - \rho A_{0i}\omega^2 e^{i[k(l_n x_n)-\omega t]} = 0$$

$$C_{ijkl}\left(k^2 l_l l_j\right)A_{0k} - \rho A_{0i}\omega^2 = 0$$

$$C_{ijkl}\left(k^2 l_l l_j\right)A_{0k} - \rho A_{0k}\delta_{ki}\,\omega^2 = 0$$

$$(C_{ijkl}k^2 l_l l_j - \rho\delta_{ki}\omega^2)A_{0k} = 0$$

Es un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, para que tenga solución distinta de la trivial el determinante debe ser cero.

$$det(C_{ijkl}k^2 l_l l_j - \rho\delta_{ki}\omega^2) = 0$$

Que es también la relación de dispersión para el caso de propagación en 3D. Llamando $c = \frac{\omega}{k}$ remplazando

$$(C_{ijkl}l_l l_j - \rho c^2\delta_{ki})A_{0k} = 0$$

Llamando $\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_l l_j$ matriz de Christoffel, que es simétrica, (gracias a la simetría de C_{ijkl}), queda

$$\det(\Gamma_{ik} - \rho\delta_{ki}c^2) = 0$$

Ejercicio

Demostrar que Γ_{ik}es una matriz simétrica

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_l l_j = C_{klij}l_l l_j = C_{kjil}l_j l_l = C_{kjil}l_l l_j = \Gamma_{ki}$$

Vemos que también se puede pensamos al sistema como un problema de autovalores y autovectores de la matriz Γ_{ik} o se queremos hallar los autovalores y autovectores, por tanto

$$\det(\Gamma_{ik} - \rho c^2\delta_{ki}) = 0$$

Como la matriz Γ_{ik} es simétrica y real los autovalores son reales y los autovectores son ortogonales, luego ρc^2debe ser positiva. La ecuación $\det(\Gamma_{ik} - \rho c^2\delta_{ki}) = 0$ se llama ecuación característica de la matriz Γ_{ik} y genera un polinomio de grado tres en nuestro caso, llamado polinomio característico o secular

$$P(\rho c^2) = \det(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ki}) = (-1)^3[(\rho c^2)^3 - a(\rho c^2)^2 - b(\rho c^2) - d]$$

Para una matriz de 3x3 el polinomio característico se puede hallar como

$$P(\rho c^2) = \det(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ki}) = -(\rho c^2)^3 + tr_1(\Gamma_{ik})(\rho c^2)^2 - tr_2(\Gamma_{ik})(\rho c^2) + det(\Gamma_{ik})$$

Con

$$tr_1(\Gamma_{ik}) = \Gamma_{ii}$$

$$tr_2(\Gamma_{ik}) = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}$$

Observemos que, en nuestro caso, siempre el coeficiente del termino cubico será -1.

Por ser Γ_{ik} una matriz de tercer orden tendremos siempre tres autovalores que indicaremos

$$(\rho c^2)^{(1)} \quad , \quad (\rho c^2)^{(2)} \quad , \quad (\rho c^2)^{(3)}$$

El exponente entre paréntesis indica la raíz del polinomio característico o bien el autovalor correspondiente. A partir de estos valores se halla la velocidad despejando ρ y hallando la raíz cuadrada. Queda claro que por cada autovalor halaremos el autovector correspondiente o se el vector polarización, luego generalmente hay tres ondas propagándose en la misma dirección con diferentes velocidades y perpendiculares entre sí. El vector desplazamiento $\vec{u}$ de cada onda generalmente no es paralelo ni perpendicular a la dirección de propagación l_i. La onda que tiene $\vec{u}$ más cercana o próximo a l_i se la llama cuasilongitudinal, mientras que las otras son cuasi transversales. Para algunos casos especiales las ondas son puramente longitudinales y transversales. Ver esquema siguiente Fig. 5.1 , en el grafico se observa que ${A_{01}}^{(2)}$ es la onda más próxima al l_i , luego esta es la cuasilongitudinal, las otras dos son cuasitranversales

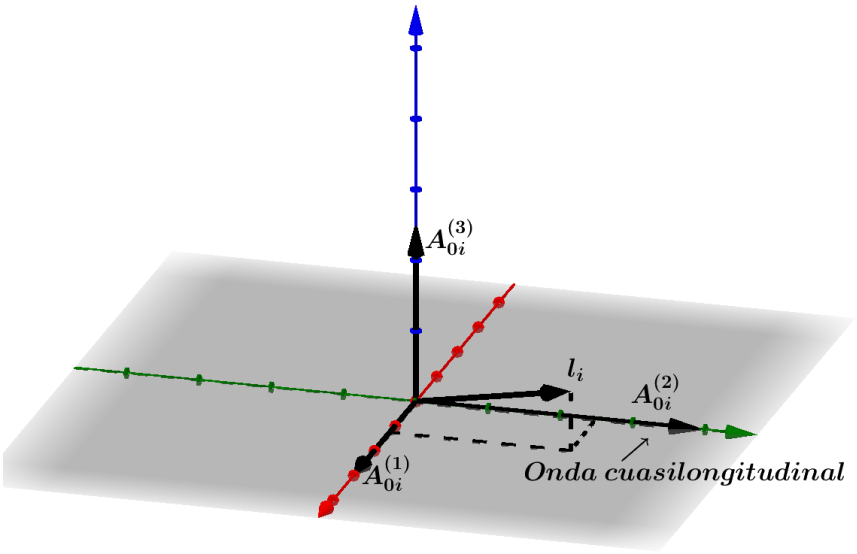


Fig. 5.1

Ccalculemos el tensor de Chistoffel $\Gamma_{ik} = C_{ijkl} l_j l_l$ donde $\check{l}$ es el versor que indica la dirección de propagación.

Desarrollando el tensor Γ_{ik}

$$\Gamma_{ik} = C_{i1k1} l_1 l_1 + C_{i2k1} l_2 l_1 + C_{i3k1} l_3 l_1 + C_{i1k2} l_1 l_2 + C_{i2k2} l_2 l_2 + C_{i3k2} l_3 l_2 + C_{i1k3} l_1 l_3 + C_{i2k3} l_1 l_3 + C_{i3k3} l_3 l_3$$

$$\Gamma_{11} = C_{1111} {l_1}^2 + C_{1211} l_2 l_1 + C_{1311} l_3 l_1 + C_{1112} l_1 l_2 + C_{1212} {l_2}^2 + C_{1213} l_3 l_2 + C_{1113} l_1 l_3 + C_{1213} l_2 l_3 + C_{1313} {l_3}^2$$

Utilizando la notación de Voigt,

$$\Gamma_{11} = C_{11} {l_1}^2 + C_{66} {l_2}^2 + C_{55} {l_3}^2 + 2C_{56} l_2 l_3 + 2C_{51} l_1 l_3 + +2C_{61} l_1 l_2$$
$$\Gamma_{22} = C_{66} {l_1}^2 + C_{22} {l_2}^2 + C_{44} {l_3}^2 + 2C_{24} l_2 l_3 + 2C_{46} l_1 l_3 + 2C_{26} l_1 l_2$$
$$\Gamma_{33} = C_{55} {l_1}^2 + C_{44} {l_2}^2 + C_{33} {l_3}^2 + 2C_{34} l_2 l_3 + 2C_{35} l_1 l_3 + 2C_{45} l_1 l_2$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = C_{16} {l_1}^2 + C_{26} {l_2}^2 + C_{45} {l_3}^2 + (C_{46} + C_{25}) l_2 l_3 + (C_{14} + C_{56}) l_1 l_3 + (C_{12} + C_{66}) l_1 l_2$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = C_{15} {l_1}^2 + C_{46} {l_2}^2 + C_{35} {l_3}^2 + (C_{45} + C_{36}) l_2 l_3 + (C_{13} + C_{55}) l_1 l_3 + (C_{14} + C_{56}) l_1 l_2$$
$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = C_{56} {l_1}^2 + C_{24} {l_2}^2 + C_{34} {l_3}^2 + (C_{44} + C_{23}) l_2 l_3 + (C_{36} + C_{45}) l_1 l_3 + (C_{25} + C_{46}) l_1 l_2$$

Veamos el siguiente ejemplo: Calculemos las velocidades y el vector polarización de una onda que se propaga en un **sólido isótropo** en la dirección $\check{l} = (1,0,0)$. En este caso particular calculemos el tensor de las constantes elásticas de la siguiente manera:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

Término que proviene de expresar al tensor de las constantes elásticas para un medio isótropo, como el tensor más general de cuarto orden en coordenadas Cartesianas, donde las constantes son los coeficientes de Lamé. En otros casos partiremos directamente del tensor de las constantes elásticas.

$$C_{1111} = C_{11} = \lambda\delta_{11}\delta_{11} + \mu(\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{11}\delta_{11}) = \lambda + 2\mu$$
$$C_{2222} = C_{22} = \lambda\delta_{22}\delta_{22} + \mu(\delta_{22}\delta_{22} + \delta_{22}\delta_{22}) = \lambda + 2\mu$$

Ídem para $C_{33} = \lambda + 2\mu$

$$C_{1122} = C_{12} = C_{21} = \lambda\delta_{11}\delta_{22} + \mu(\delta_{12}\delta_{12} + \delta_{12}\delta_{12}) = \lambda$$

Siguiendo de esta manera se llega a la matriz C

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Calculemos ahora la matriz de Chistoffel $\Gamma_{ik} = C_{ijkl}l_j l_l$ en la dirección $\check{l} = (1,0,0)$
Vemos que todos los sumandos se anulan menos $i = j$ por tanto

$$\Gamma_{11} = C_{1111} = C_{11} = \lambda + 2\mu$$
$$\Gamma_{12} = C_{1121} = C_{16} = 0$$
$$\Gamma_{13} = C_{1131} = C_{51} = \mu$$
$$\Gamma_{22} = C_{2121} = C_{66} = 0$$
$$\Gamma_{23} = C_{1231} = C_{65} = 0$$

De igual manera se obtiene $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0$ y $\Gamma_{33} = \mu$

Recordando que

$$(C_{ijkl}l_l l_j - \rho c^2 \delta_{ki})A_{0k} = 0$$

$$(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ki})A_{0k} = 0$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} = 0$$

Para que tenga solución distinta de la trivial debe ser cero el determinante

$$det \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante y despejando la velocidad al cuadrado c^2

$$(\lambda + 2\mu - \rho c^2)(\mu - \rho c^2)^2 = 0$$

Luego debe ser cero alguno de los dos productos, encontrando tres soluciones

$$\lambda + 2\mu - \rho c^2 = 0 \rightarrow c^{(1)} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$\mu - \rho c^2 = 0 \rightarrow c^{(2)} = c^{(3)} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Obteniendo tres soluciones dos de ellas repetidas (tres autovalores). Que son las velocidades obtenidas anteriormente, como era de esperar. Remplazando un autovalor, uno por ves, en la ecuación, obtenemos los tres autovectores,

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu - \rho c^2)A_{01} = 0 \\ (\mu - \rho c^2)A_{02} = 0 \\ (\mu - \rho c^2)A_{03} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\lambda + 2\mu - \rho c^{(1)2}\right) {A_{01}}^{(1)} = 0 \\ \left(\mu - \rho c^{(1)2}\right) {A_{02}}^{(1)} = 0 \\ \left(\mu - \rho c^{(1)2}\right) {A_{03}}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

El mismo autovalor en las tres ecuaciones

$$\left(\lambda + 2\mu - \rho c^{(1)2}\right) {A_{01}}^{(1)} = 0$$

$$\left(\lambda + 2\mu - \rho(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho})\right) {A_{01}}^{(1)} = (\lambda + 2\mu - (\lambda + 2\mu)) {A_{01}}^{(1)} = 0 \Longrightarrow {A_{01}}^{(1)} = a$$

$$\left(\mu - \rho(\frac{\lambda+2\mu}{\rho})\right) {A_{02}}^{(1)} = (\mu - (\lambda + 2\mu)) {A_{02}}^{(1)} = (\lambda - \mu) {A_{02}}^{(1)} = 0 \Longrightarrow {A_{02}}^{(1)} = 0$$

$$\left(\mu - \rho(\frac{\lambda+2\mu}{\rho})\right) {A_{03}}^{(1)} = (\mu - (\lambda + 2\mu)) {A_{03}}^{(1)} = (\lambda - \mu) {A_{03}}^{(1)} = 0 \Longrightarrow {A_{03}}^{(1)} = 0$$

Luego el primer autovector hallado vale

$$\left({A_{01}}^{(1)}, {A_{02}}^{(1)}, {A_{03}}^{(1)}\right) = (a, 0, 0)$$

Repitiendo lo mismo para hallar el segundo autovector

$$\left(\lambda + 2\mu - \rho(\frac{\mu}{\rho})\right) {A_{01}}^{(2)} = (\lambda + \mu) {A_{01}}^{(2)} = 0 \Longrightarrow {A_{01}}^{(2)} = 0$$

$$\left(\mu - \rho(\frac{\mu}{\rho})\right) {A_{02}}^{(2)} = (\mu - \mu) {A_{02}}^{(2)} = 0 \Longrightarrow {A_{02}}^{(2)} = b$$

$$\left(\mu - \rho(\frac{\mu}{\rho})\right) {A_{03}}^{(2)} = (\mu - \mu) {A_{03}}^{(2)} = 0 \Longrightarrow {A_{03}}^{(2)} = \mathrm{d}$$

Luego el segundo autovector es

$$\left({A_{01}}^{(2)}, {A_{02}}^{(2)}, {A_{03}}^{(2)}\right) = (0, b, d)$$

El tercer autovector tiene el mismo valor.

$$\left({A_{01}}^{(3)}, {A_{02}}^{(3)}, {A_{03}}^{(3)}\right) = (0, e, f)$$

Es conveniente normalizar los autovalores luego dividimos por el módulo de cada uno

$$\frac{{A_{0i}}^{(1)}}{|{A_{0i}}^{(1)}|} = (1,0,0) \quad \frac{{A_{0i}}^{(2)}}{|{A_{0i}}^{(2)}|} = \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}(0,b,d) \quad \frac{{A_{0i}}^{(3)}}{|{A_{0i}}^{(3)}|} = \frac{1}{\sqrt{e^2+f^2}}(0,e,f)$$

Calculemos el producto escolar de cada uno autovector con l_i con el objeto de determinar qué tipo de onda es

$${A_{0i}}^{(1)} l_i = \left|{A_{0i}}^{(1)}\right||l_i| \cos\alpha = (1,0,0)(1,0,0) = 1 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow {A_{0i}}^{(1)} \parallel l_i$$

La onda es longitudinal puesto que es paralelo al vector de propagación, para los otros autovectores será

$${A_{0i}}^{(2)} l_i = \left|{A_{0i}}^{(2)}\right||l_i| \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}(0,b,d)(1,0,0) = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow {A_{0i}}^{(2)} y$$

$${A_{0i}}^{(3)} \perp l_i$$

Luego ${A_{0i}}^{(2)}$ y ${A_{0i}}^{(3)}$ son vectores perpendiculares a la dirección de propagación, son ondas transversales Fig. 5.2

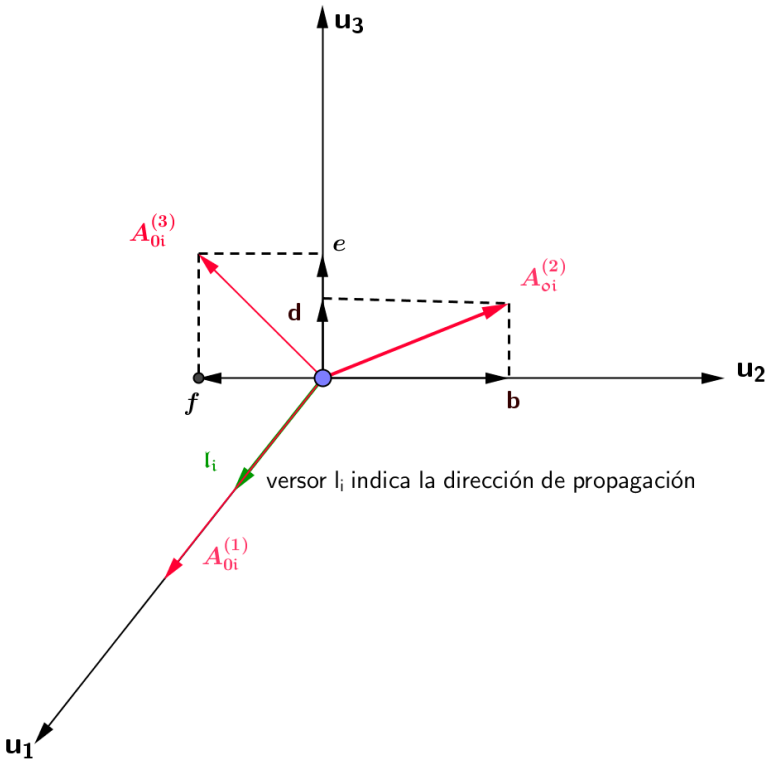


Fig. 5.2

Luego las ondas tendrán la expresión siguiente:
La longitudinal

$$u_k = A_{0k} e^{i[k(l_n x_n) - \omega t]}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i[k(1,0,0)(x_1,x_2,x_3) - \omega t]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i[kx_1 - \omega t]} \quad \text{con}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Las transversales

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ d \end{pmatrix} e^{i[k(1,0,0)(x_1,x_2,x_3) - \omega t]} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ d \end{pmatrix} e^{i[kx_1 - \omega t]}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{e^2 + f^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ f \end{pmatrix} e^{i[k(1,0,0)(x_1,x_2,x_3) - \omega t]} = \frac{1}{\sqrt{e^2 + f^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ f \end{pmatrix} e^{i[kx_1 - \omega t]}$$

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Rescatemos algunas expresiones halladas para medios homogéneos e isótropos que podrán ser utilizadas más adelante

$$\boldsymbol{C_{11} = \lambda + 2\mu \,,\; C_{12} = \lambda \,,\; C_{44} = \mu}$$

También

$$\boldsymbol{c_l = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \,, \quad c_t = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \,,}$$

Veamos las relaciones más usadas entre las constantes elásticas y las velocidades

$$\lambda = \rho\left(c_l^2 - 2c_t^2\right), \quad \mu = \rho c_t^2$$

$$E = \frac{\rho c_t^2\left(3c_l^2 - 4c_t^2\right)}{c_l^2 - c_l^2}, \quad \nu = \frac{c_l^2 - 2c_t^2}{2c_l^2 - 2c_t^2}$$

$$K = \left(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2\right)$$

Otro ejemplo

Veamos el caso de un sistema con **simetría cubica**. La matriz de los coeficientes elásticos es

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

El primer paso es encontrar la matriz de Chistoffel, sin tener en cuenta la dirección de propagación de la onda, para ello recordemos

$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2 + C_{55}{l_3}^2 + 2C_{56}l_2l_3 + 2C_{51}l_1l_3 + 2C_{61}l_1l_2$$

$$\Gamma_{22} = C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2 + C_{44}{l_3}^2 + 2C_{24}l_2l_3 + 2C_{46}l_1l_3 + 2C_{26}l_1l_2$$

$$\Gamma_{33} = C_{55}{l_1}^2 + C_{44}{l_2}^2 + C_{33}{l_3}^2 + 2C_{34}l_2l_3 + 2C_{35}l_1l_3 + 2C_{45}l_1l_2$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = C_{16}{l_1}^2 + C_{26}{l_2}^2 + C_{45}{l_3}^2 + (C_{46} + C_{25})l_2l_3 + (C_{14} + C_{56})l_1l_3 + (C_{12} + C_{66})l_1l_2$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = C_{15}{l_1}^2 + C_{46}{l_2}^2 + C_{35}{l_3}^2 + (C_{45} + C_{36})l_2l_3 + (C_{13} + C_{55})l_1l_3 + (C_{14} + C_{56})l_1l_2$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = C_{56}{l_1}^2 + C_{24}{l_2}^2 + C_{34}{l_3}^2 + (C_{44} + C_{23})l_2l_3 + (C_{36} + C_{45})l_1l_3 + (C_{25} + C_{46})l_1l_2$$

Luego anulamos los C_{ij} que corresponde obtenemos la matriz de Christoffel

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11}\,{l_1}^2 + C_{44}\left(1-{l_1}^2\right) & (C_{12}+C_{44})l_1l_2 & (C_{12}+C_{44})l_1l_3 \\ (C_{12}+C_{44})\,l_1l_2 & C_{11}{l_2}^2 + C_{44}\left(1-{l_2}^2\right) & (C_{12}+C_{44})l_2l_3 \\ (C_{12}+C_{44})\,l_1l_3 & (C_{12}+C_{44})l_2l_3 & C_{11}{l_3}^2 + C_{44}\left(1-{l_3}^2\right) \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones

$$(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ki}) A_{0k} = 0$$

Debe tener determinante nulo

$$\begin{vmatrix} C_{11}\,{l_1}^2 + C_{44}\left(1-{l_1}^2\right) - \rho c^2 & (C_{12}+C_{44})l_1l_2 & (C_{12}+C_{44})l_1l_3 \\ (C_{12}+C_{44})\,l_1l_2 & C_{11}{l_2}^2 + C_{44}\left(1-{l_2}^2\right) - \rho c^2 & (C_{12}+C_{44})l_2l_3 \\ (C_{12}+C_{44})\,l_1l_3 & (C_{12}+C_{44})l_2l_3 & C_{11}{l_3}^2 + C_{44}\left(1-{l_3}^2\right) - \rho c^2 \end{vmatrix}$$

Segundo paso tengamos en cuenta ahora la dirección de propagación de la onda supongamos que $\breve{l} = (1\,,0\,,0)$, luego el determinante queda

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo queda

$$(C_{11} - \rho c^2)(C_{44} - \rho c^2)(C_{44} - \rho c^2) = 0$$

Las raíces o valores propios o autovalores son

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

Cálculo de los autovectores

$$\begin{pmatrix} C_{11}-\rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44}-\rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}-\rho c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix}=0$$

Al ver que la matriz diagonal tiene dos términos iguales se deduce que tendrá dos velocidades iguales. Remplazando la primera velocidad

$$c^{(1)}=\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

El índice superior, entre paréntesis, indica el autovalor que se usas

$$\left[C_{11}-\rho c^{(1)2}\right]{A_{01}}^{(1)}=\left[C_{11}-\rho\frac{C_{11}}{\rho}\right]{A_{01}}^{(1)}=[0]{A_{01}}^{(1)}=0 \Rightarrow {A_{01}}^{(1)}=1$$
$$\left[C_{44}-\rho c^{(1)2}\right]{A_{02}}^{(1)}=[C_{44}-C_{11}]{A_{02}}^{(1)}=0 \Rightarrow {A_{02}}^{(1)}=0$$
$$\left[C_{44}-\rho c^{(1)2}\right]{A_{03}}^{(1)}=[C_{44}-C_{11}]{A_{03}}^{(1)}=0 \Rightarrow {A_{03}}^{(1)}=0$$

Luego para $c^{(1)}=\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ el auto-vector o vector de polarización es

$$\left({A_{01}}^{(1)},{A_{02}}^{(1)},{A_{03}}^{(1)}\right)=(1,0,0)$$

Realizamos el mismo cálculo para el segundo autovector

$$\left[C_{11}-\rho c^{(2)2}\right]{A_{01}}^{(2)}=[C_{11}-C_{44}]{A_{01}}^{(2)}=0 \Rightarrow {A_{01}}^{(2)}=0$$
$$\left[C_{44}-\rho c^{(2)2}\right]{A_{02}}^{(2)}=[C_{44}-C_{44}]{A_{02}}^{(2)}=0 \Rightarrow {A_{02}}^{(2)}=\text{a}$$
$$\left[C_{44}-\rho c^{(2)2}\right]{A_{03}}^{(2)}=[C_{44}-C_{44}]{A_{03}}^{(2)}=0 \Rightarrow {A_{03}}^{(2)}=b$$

Para $c^{(2)}=\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ el auto-vector o vector de polarización es

$$\left({A_{01}}^{(2)},{A_{02}}^{(2)},{A_{03}}^{(2)}\right)=(0,a,b)$$

El tercer caso da igual. Resta ver qué tipo de ondas son, haciendo el producto escalar

Para $c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ $\quad \left({A_{01}}^{(1)}, {A_{02}}^{(1)}, {A_{03}}^{(1)}\right).(1,0,0) = (1,0,0).(1,0,0) = 1 \Rightarrow$

$\vec{A}_0^{\,(1)} \parallel \check{l}$ onda longitudinal.

Para $c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ $\quad \left({A_{01}}^{(2)}, {A_{02}}^{(2)}, {A_{03}}^{(2)}\right).(1,0,0) = (0,a,b).(1,0,0) = 0 \Rightarrow$

$\vec{A}_0^{\,(2)} \perp \check{l}$ onda transversal.

Lo mismo da el tercer autovector.

Ejercicio

Estudie la propagación de las ondas elásticas en la estructura cubica para la dirección $\check{l} = (\cos\theta\,, sin\theta, 0)$ con $\theta = 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolver el caso general en el plano $x_1; x_2$ no es imposible, pero si trabajoso, luego, lo planteamos de manera general y lo resolvemos para el caso concreto de $\theta = 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .Partimos de

$$\begin{vmatrix} C_{11}\,{l_1}^2 + C_{44}\left(1 - {l_1}^2\right) - \rho c^2 & (C_{12} + C_{44}) l_1 l_2 & (C_{12} + C_{44}) l_1 l_3 \\ (C_{12} + C_{44})\, l_1 l_2 & C_{11}{l_2}^2 + C_{44}\left(1 - {l_2}^2\right) - \rho c^2 & (C_{12} + C_{44}) l_2 l_3 \\ (C_{12} + C_{44})\, l_1 l_3 & (C_{12} + C_{44}) l_2 l_3 & C_{11}{l_3}^2 + C_{44}\left(1 - {l_3}^2\right) - \rho c^2 \end{vmatrix}$$

Reemplazando datos

$$\begin{vmatrix} C_{11}\, cos^2\theta + C_{44}\, sin^2\theta - \rho c^2 & (C_{12} + C_{44}) \cos\theta \sin\theta & 0 \\ (C_{12} + C_{44}) \cos\theta \sin\theta & C_{11}\, sin^2\theta + C_{44}\, cos^2\theta - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando

$$(C_{44} - \rho c^2)\Big[(C_{11}\, cos^2\theta + C_{44}\, sin^2\theta - \rho c^2)(C_{11}\, sin^2\theta + C_{44}\, cos^2\theta - \rho c^2) - \left((C_{12} + C_{44}) \cos\theta \sin\theta\right)^2\Big]$$

Vemos que una raíz de la ecuación es $\rho c^2 = C_{44}$ y es independiente del ángulo. Las otras soluciones salen de hacer cero el corchete

$$\Big[(C_{11}\,cos^2\theta + C_{44}\,sin^2\theta - \rho c^2)(C_{11}\,sin^2\theta + C_{44}\,cos^2\theta - \rho c^2)$$
$$-\big((C_{12}+C_{44})\cos\theta\,\sin\theta\big)^2\Big] = 0$$

Reemplazando el valor del ángulo la expresión se simplifica ya que las dos funciones trigonométricas tienen el mismo valor numérico para ese ángulo

$$\left(C_{11}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + C_{44}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \rho c^2\right)^2 = \left((C_{12}+C_{44})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^2$$

$$\frac{C_{11}}{2} + \frac{C_{44}}{2} - \rho c^2 = \mp\frac{1}{2}(C_{12}+C_{44})$$

Luego tenemos las dos soluciones restantes

$$C_{11} + C_{44} - 2\rho c^2 = C_{12} + C_{44} \Longrightarrow \rho c^2 = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

$$C_{11} + C_{44} - 2\rho c^2 = -C_{12} - C_{44} \Longrightarrow \rho c^2 = \frac{C_{11} + 2C_{44} + C_{12}}{2}$$

Encontramos las tres velocidades, resta hallar las direcciones de polarización.

Calculemos primeramente la dirección de polarización para $\rho c^2 = C_{44}$ llamando $c^{(2)}$ a esta velocidad

$$\begin{pmatrix} C_{11}\,cos^2\theta + C_{44}\,sin^2\theta - \rho c^2 & (C_{12}+C_{44})\cos\theta\,\sin\theta & 0 \\ (C_{12}+C_{44})\cos\theta\,\sin\theta & C_{11}\,sin^2\theta + C_{44}\,cos^2\theta - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} C_{11}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + C_{44}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \rho c^2 & (C_{12}+C_{44})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & 0 \\ (C_{12}+C_{44})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & C_{11}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + C_{44}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho c^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C_{11}\frac{1}{2} + C_{44}\,\frac{1}{2} - C_{44} & (C_{12}+C_{44})\frac{1}{2} & 0 \\ (C_{12}+C_{44})\frac{1}{2} & C_{11}\,\frac{1}{2} + C_{44}\,\frac{1}{2} - C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - C_{44} \end{pmatrix}$$

Luego el sistema de ecuaciones que debemos resolver es

$$(C_{11} - C_{44})A_{01}^{(2)} + (C_{12} + C_{44})A_{02}^{(2)} = 0$$
$$(C_{12} + C_{44})A_{01}^{(2)} + (C_{11} - C_{44})A_{02}^{(2)} = 0$$

$$0A_{03}^{(2)} = 0$$

Restando m.a.m las dos primeras ecuaciones

$$(C_{11} - C_{12} - 2C_{44})\left(A_{01}^{(2)} - A_{02}^{(2)}\right) = 0 \Longrightarrow A_{01}^{(2)} = A_{02}^{(2)}$$

Sumando m.a.m

$$(C_{11} + C_{12})\left(A_{01}^{(2)} + A_{02}^{(2)}\right) \Longrightarrow A_{01}^{(2)} = -A_{02}^{(2)}$$

Luego

$$A_{01}^{(2)} = A_{02}^{(2)} = 0 \quad \text{y como } 0A_{03}^{(2)} = 0 \Longrightarrow A_{03}^{(2)} = 1$$

Por tanto, la dirección del vector polarización en este caso es

$$A_{0i}^{(2)} = (0,0,1)$$

Perpendicular a la dirección de propagación que es $(1,1,0)$, luego la onda es transversal.

Calculamos ahora el vector polarización para la velocidad $\rho c^2 = \frac{C_{11}+2C_{44}+C_{12}}{2}$ llamando $c^{(1)}$ a esta velocidad. Procediendo de igual manera se arriba

$$-(C_{44} + C_{12})A_{01}^{(1)} + (C_{44} + C_{12})A_{02}^{(1)} = 0$$
$$(C_{44} + C_{12})A_{01}^{(1)} - (C_{44} + C_{12})A_{02}^{(1)} = 0$$
$$(C_{11} - C_{12})A_{03}^{(1)} = 0$$

Resolviendo llegamos

$$A_{0i}^{(1)} = (1,1,0)$$

En este caso tenemos una onda longitudinal.

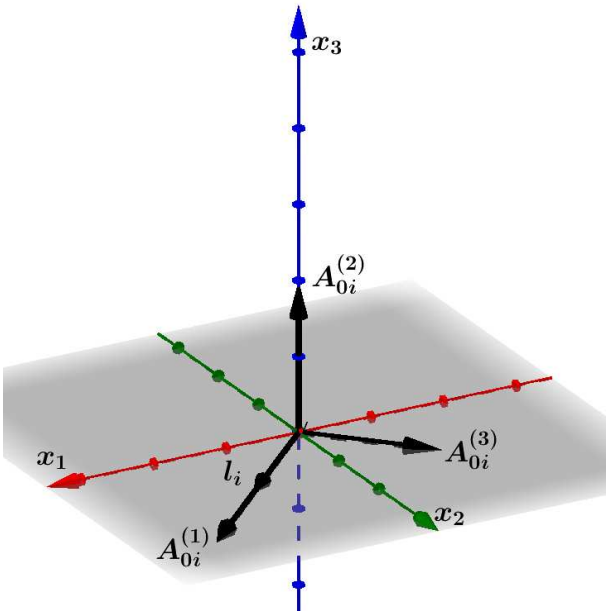


Fig. 5.3

Para la velocidad que falta nos da

$$A_{0i}^{(3)} = (-1,1,0)$$

En el grafico Fig. 5.3 se observa los resultados obtenidos.

Ejercicio

También tenemos una estructura cubica, pero en este caso calcularemos las velocidades y dirección de polarización para la siguiente dirección de propagación $l_i = (1,1,1,)$ con $|l_i| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego el versor será $\check{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Como se verá, este es un caso muy ilustrativo por tener dos velocidades iguales que deben ser ubicadas en el espacio no coincidiendo con los ejes coordenados.

Calculamos los elementos de la matriz de Christoffel

$$\Gamma_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{11} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44})$$

$$\Gamma_{22} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{11} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44})$$

$$\Gamma_{33} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{44} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 C_{11} = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44})$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (C_{12} + C_{44}) = \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44})$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (C_{12} + C_{44}) = \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44})$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (C_{12} + C_{44}) = \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44})$$

Luego la matriz es

$$\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho c^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44}) - \rho c^2 & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) \\ \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) & \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44}) - \rho c^2 & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) \\ \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) & \frac{1}{3}(C_{12} + C_{44}) & \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44}) - \rho c^2 \end{pmatrix}$$

Debemos hallar la velocidad c que hacen cero el $det(\Gamma_{ik} - \delta_{ik}\rho c^2)$ hay diversas maneras de continuar, elegimos la que creemos más simple, para tal fin llamamos

$$a = \tfrac{1}{3}(C_{11} + 2C_{44}) \text{ y } b = \tfrac{1}{3}(C_{12} + 2C_{44})$$

Entonces el determinante queda

$$\begin{vmatrix} a - \rho c^2 & b & b \\ b & a - \rho c^2 & b \\ b & b & a - \rho c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a - \rho c^2)\begin{vmatrix} a - \rho c^2 & b \\ b & a - \rho c^2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & b \\ b & a - \rho c^2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & a - \rho c^2 \\ b & b \end{vmatrix}$$

Recordando que el determinante cambia de signo si intercambiamos dos fila o dos columnas, entonces

$$= (a - \rho c^2)\begin{vmatrix} a - \rho c^2 & b \\ b & a - \rho c^2 \end{vmatrix} + 2b\begin{vmatrix} b & a - \rho c^2 \\ b & b \end{vmatrix}$$

$$(a - \rho c^2)[(a - \rho c^2)^2 - b^2] + 2b[b^2 - b(a - \rho c^2)] =$$

$$(a - \rho c^2)^3 - 3b^2(a - \rho c^2) + b^3 = 0$$

Nos quedó una ecuación cubica reducida, llamando $x = (a - \rho c^2)$, $p = -3b^2$ y $q = 2b^3$ se obtiene

$$x^3 - 3b^3 x + 2b^2 = 0$$

Que es simple de resolver por el método de Cardano cuyas raíces son:

$x_1 = A + B$, $x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(A - B)$ y $x_3 = {x_2}^*$ complejo conjugado de x_2

Con $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ y por último $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ llamado discriminante quien nos dice que tipo de raíces tiene la ecuación cubica, recordemos que:

1. Si $\Delta > 0$ tiene una raíz real y dos complejas.
2. Si $\Delta = 0$ tiene tres raíces reales con dos iguale.
3. Si $\Delta < 0$ tiene tres raíces reales distintas.

Nuestro caso puede ser el segundo o tercero, para discernir calculemos el discriminante

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \Delta = \left(\frac{-3b^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2b^3}{2}\right)^2 = 0$$

Lo cual indica tres raíces reales y dos iguales. Pasamos al cálculo de las raíces

$$A = \sqrt[3]{-\frac{2b^3}{2}} = -b \ , \ B = \sqrt[3]{-\frac{2b^3}{2}} = -b$$

Por tanto

$$x_1 = A + B = -2b \ , \ x_2 = -\frac{1}{2}(A + B) = -\frac{1}{2}(-b - b) = b \text{ y } x_3 = b$$

Retomando las variables originales

$$x_1 = -2b = -\frac{2}{3}C_{12} - \frac{2}{3}C_{44} = a - \rho c^2 \Longrightarrow \rho c^2 = \frac{1}{3}C_{11} + \frac{2}{3}C_{44} + \frac{2}{3}C_{12} + \frac{2}{3}C_{44} =$$

$$\rho c^2 = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$$

$$C_{11} = \frac{1}{3}C_{12} + \frac{1}{3}C_{44} = b = \frac{1}{3}C_{12} + \frac{1}{3}C_{44} = a - \rho c^2$$

$$\rho c^2 = \frac{1}{3}C_{11} + \frac{2}{3}C_{44} - \frac{1}{3}C_{12} - \frac{1}{3}C_{44} = \frac{1}{3}(C_{11} + C_{44} - C_{12})$$

$$\rho c^2 = \frac{1}{3}(C_{11} + C_{44} - C_{12})$$

La tercera velocidad es igual a la que se deduce de x_2.

El esquema siguiente muestra la situación de los vectores en el espacio Fig. 5.4

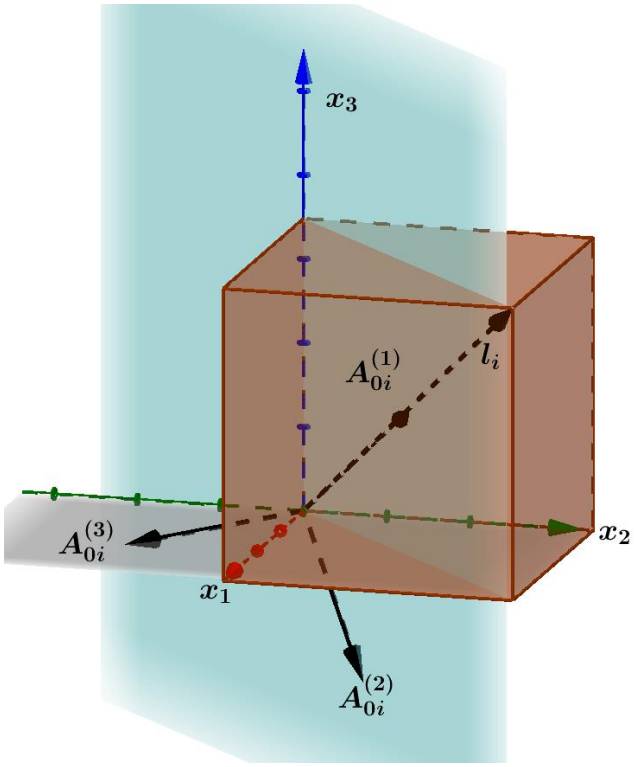


Fig. 5.4

El próximo paso es el estudio de las direcciones de polarización.

Calculo para la velocidad correspondiente a $\rho c^2 = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$ cuyo vector de polarización llamamos $A_{0i}^{(1)}$. Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente, previo reemplazo de $\rho c^2 = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$

$$-\frac{2}{3}(C_{12}+C_{44})A_{01}^{(1)}+\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{02}^{(1)}+\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{03}^{(1)}=0$$
$$\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{01}^{(1)}-\frac{2}{3}(C_{12}+C_{44})A_{02}^{(1)}++\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{03}^{(1)}=0$$
$$\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{01}^{(1)}+\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})A_{02}^{(1)}-\frac{2}{3}(C_{12}+C_{44})A_{03}^{(1)}+=0$$

Sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, vemos que $\frac{1}{3}(C_{12}+C_{44})$ está presente en todos los términos, luego podemos simplificarlos, quedando

$$-2A_{01}^{(1)}+A_{02}^{(1)}+A_{03}^{(1)}=0$$
$$A_{01}^{(1)}-2A_{02}^{(1)}+A_{03}^{(1)}=0$$
$$A_{01}^{(1)}+A_{02}^{(1)}-2A_{03}^{(1)}=0$$

Resolviendo se encuentran las siguientes relaciones entre las incógnitas $A_{02}^{(1)}=A_{03}^{(1)}$ y $A_{01}^{(1)}=A_{03}^{(1)}$ si damos a $A_{01}^{(1)}=1$ vemos que el vector $A_{0i}^{(1)}=(1,1,1)$ es colineal con el l_i por tanto la onda es longitudinal.

Pasemos a la segunda velocidad

$$\rho c^2=\frac{1}{3}(C_{11}+C_{44}-C_{12})$$

Al realizar la sustitución y simplificar como en el caso anterior se observa que queda una misma ecuación tres veces

$$A_{01}^{(2)}+A_{02}^{(2)}+A_{03}^{(2)}=0$$

Observemos lo siguiente

$$A_{01}^{(2)}+A_{02}^{(2)}+A_{03}^{(2)}=\left(1A_{01}^{(2)}+1A_{02}^{(2)}+1A_{03}^{(2)}\right)=l_i.A_{0i}^{(2)}\cos\alpha=0$$

Por tanto, vemos que el vector $A_{0i}^{(2)}$es perpendicular al vector l_i lo que indica que es una propagación transversal, al mismo resultado se llega trabajando con $A_{0i}^{(3)}$ .En este caso tenemos una mayor libertad para la elección de las componentes de los vectores polarización. Los vectores $A_{0i}^{(2)}$ y $A_{0i}^{(3)}$deben ser

perpendiculares a l_i y por tanto a $A_{0i}^{(1)}$, luego $A_{0i}^{(2)}$ y $A_{0i}^{(3)}$deben estar en el plano que pasa por el origen y es perpendicular a vector l_i. Recordando la expresión del plano que pasa por un punto de coordenadas $(a, b, c,)$ y es perpendicular al vector $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$, donde $a = b = c = 0$

$$l_1(x - a) + l_1(y - b) + l_1(z - c) = 0$$
$$l_1(x) + l_1(y) + l_1(z) = 0$$

Vemos que las componentes de los vectores $A_{0i}^{(2)}$ y $A_{0i}^{(3)}$verifican esta ecuación luego como sabemos están en el plano $\propto$. Luego para determinar las componentes de los vectores polarización fijamos algunas de ellas y determinamos la otra de manera que pertenezcan al plano $\propto$ con la condición de que sea perpendicular perpendiculares entre sí. El esquema de la Fig. 5.5 pretende aclarar la situación, (no se respetan las dimensiones relativas de los vectores) el plano $\propto$ pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector dirección de propagación $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$. Los vectores $A_{0i}^{(2)}$ y $A_{0i}^{(3)}$ deben pertenecer a este plano $(\propto)$. Las circunferencias pertenecientes al mismo plano indican las posibles direcciones de los vectores $A_{0i}^{(2)}$ y $A_{0i}^{(3)}$, perpendiculares entre sí.

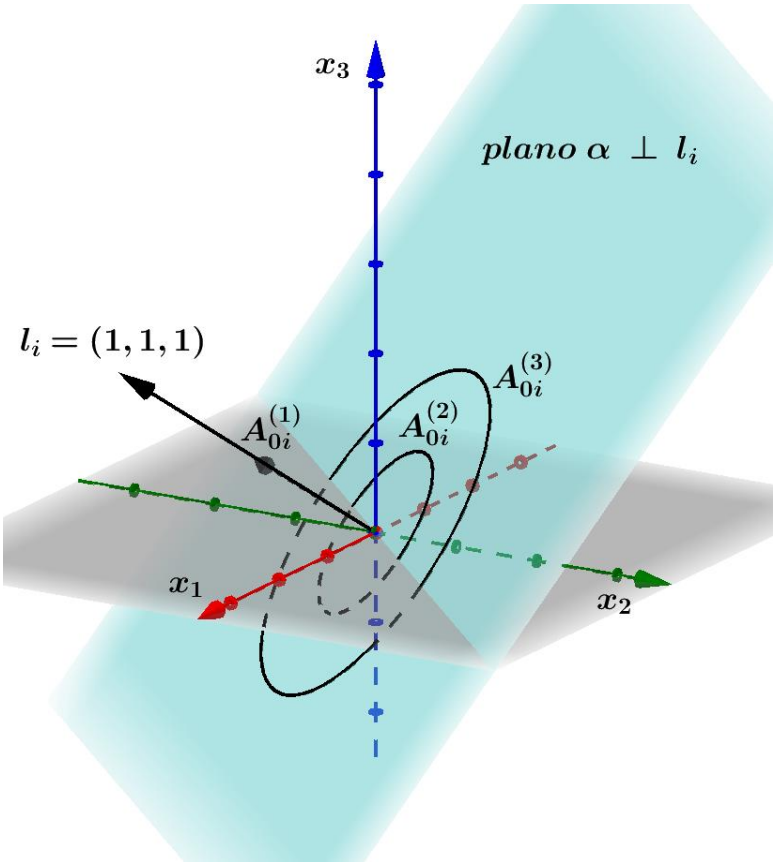


Fig. 5.5

En la tabla siguiente se observa los resultados obtenidos para algunas direcciones

Dirección de propagación l_i	*Tipo de onda*	*Velocidad*
$(1,0,0)$	*Longitudinal*	$\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$(1,1,0)$	*Transversal*	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho}}$
	Longitudinal	$\sqrt{\frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{2\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
$(1,1,1)$	*Longitudinal*	$\sqrt{\frac{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}{3\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}+C_{44}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}+C_{44}}{\rho}}$

Ejercicio

El compuesto Cadmio Tellurio tiene los siguientes valores de las constantes elásticas

$C_{11} = 5{,}33\ GPa$, $C_{12} = 3{,}65\ GPa$, $C_{44} = 2{,}044\ GPa$ la densidad es $\rho = 5854\ {}^{Kg}/_{m^3}$

Hallar las velocidades en las direcciones $(1,0,0)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Para la dirección $(1,0,0)$

$$c^{(1)} = c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}044.10^{10}Pa}{5854\ {}^{Kg}/_{m^3}}} = 1868{,}5\frac{m}{S}$$

$$c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{5{,}33.10^{10}Pa}{5854\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 3017\frac{m}{S}$$

Para la dirección $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}044.10^{10}Pa}{5854\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 1868{,}5\frac{m}{S}$$

$$c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} = \sqrt{\frac{5{,}33.10^{10}Pa - 3{,}6510^{10}Pa}{2.5854\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 1197{,}9\frac{m}{S}$$

$$c^{3} = \sqrt{\frac{C_{11} + 2C_{44} + C_{12}}{2\rho}} = \sqrt{\frac{5{,}33.10^{10}Pa + 2.2{,}04410^{10}Pa + 3{,}6510^{10}Pa}{2.5854\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 3340\frac{m}{S}$$

Seguidamente se presentan en coordenadas polares el grafico que se obtiene de las tres velocidades al variar el ángulo de la dirección de propagación de l_i en el plano (x, y). $\breve{l} = (\cos\theta\,, sin\theta, 0)$. El grafico Fig. 5.6 fue realizado por intermedio de un utilitario por **Mariano Arouxet** como trabajo practico de un curso de ondas elásticas. Se observa que la velocidad indicada en rojo no depende del ángulo de propagación, es una circunferencia de radio $1868{,}5\frac{m}{s}$. También observamos que la velocidad representada en azul coincide en $0°, 90°, 180°, 360°$con la roja mientras que a $45°, 135°, 225°, 315°$ se diferencia a valores de $1197{,}9\frac{m}{s}$. Luego se observa la velocidad representada en verde que es la longitudinal con un valor de $3017\frac{m}{s}$ para los ejes acústicos y de $3340\frac{m}{s}$ para $45°$. También se destaca que los valores máximos de la onda cuasilongitudinal se da cuando la cuasitransversal toma su valor mínimo.

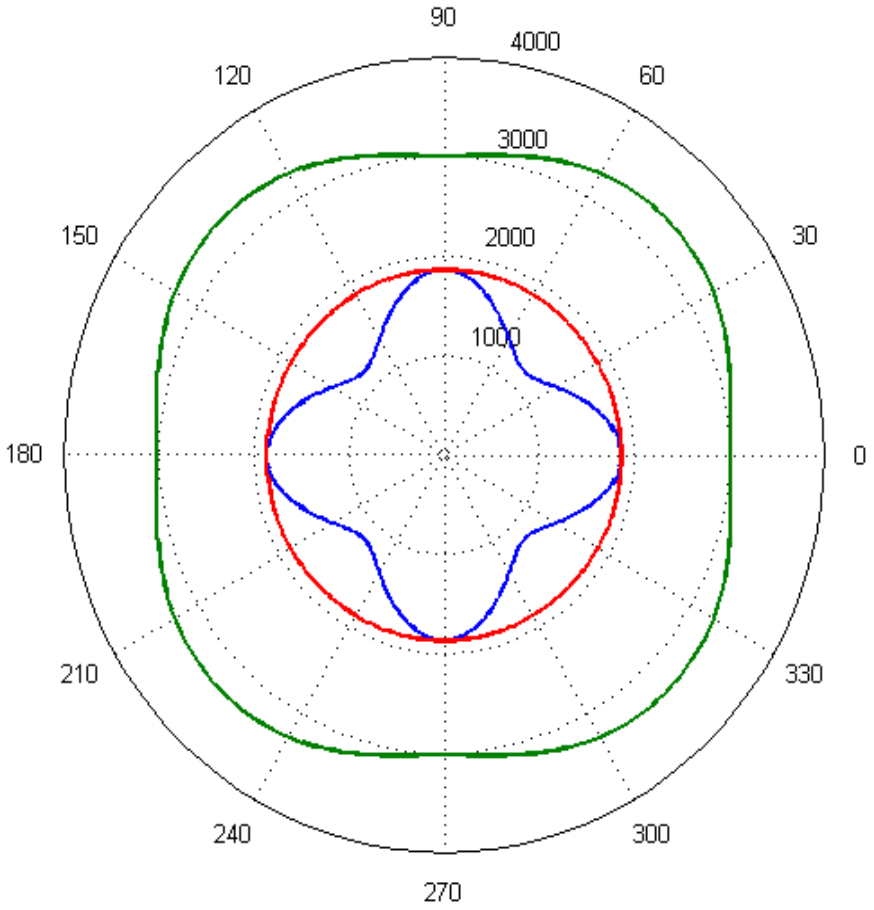

90
4000
120
60
3000
150
2000
30
1000
180
0
210
330
240
300
270

Fig. 5.6

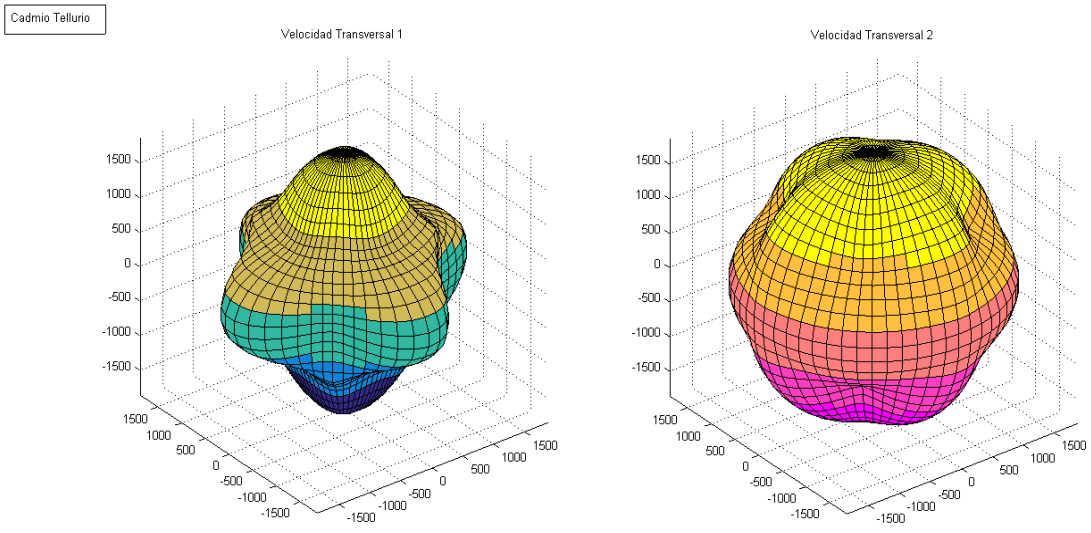

Cadmio Tellurio
Velocidad Transversal 1
Velocidad Transversal 2

Fig. 5.6

Veamos ahora el caso de un sólido con **simetría hexagonal** el cual tiene el siguiente tensor elástico

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11}-2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}-2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

Luego calculemos los términos de la matriz de Christoffel para la dirección de propagación $l_n = (0,0,1)$

$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2 + C_{55}{l_3}^2 + 2C_{56}l_2l_3 + 2C_{51}l_1l_3 + 2C_{61}l_1l_2$$
$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2 + C_{55}{l_3}^2 = C_{55}{l_3}^2 = C_{44}$$
$$\Gamma_{22} = C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2 + C_{44}{l_3}^2 + 2C_{24}l_2l_3 + 2C_{46}l_1l_3 + 2C_{26}l_1l_2$$
$$\Gamma_{22} = C_{44}{l_3}^2 = C_{44}$$
$$\Gamma_{33} = C_{55}{l_1}^2 + C_{44}{l_2}^2 + C_{33}{l_3}^2 + 2C_{34}l_2l_3 + 2C_{35}l_1l_3 + 2C_{45}l_1l_2$$
$$\Gamma_{33} = C_{33}{l_3}^2 = C_{33}$$

$$\Gamma_{12} = C_{16}{l_1}^2 + C_{26}{l_2}^2 + C_{45}{l_3}^2 + (C_{46} + C_{25})l_2l_3 + (C_{14} + C_{56})l_1l_3 + (C_{12} + C_{66})l_1l_2$$
$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = C_{45}{l_3}^2 = 0{l_3}^2 = 0$$

$$\Gamma_{13} = C_{15}{l_1}^2 + C_{46}{l_2}^2 + C_{35}{l_3}^2 + (C_{45} + C_{36})l_2l_3 + (C_{13} + C_{55})l_1l_3 + (C_{14} + C_{56})l_1l_2$$
$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = C_{35}{l_3}^2 = 0$$

$$\Gamma_{23} = C_{56}{l_1}^2 + C_{24}{l_2}^2 + C_{34}{l_3}^2 + (C_{44} + C_{23})l_2l_3 + (C_{36} + C_{45})l_1l_3 + (C_{25} + C_{46})l_1l_2$$
$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = C_{34}{l_3}^2 = 0$$

Luego la matriz Γ es

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando los autovalores

$$\begin{pmatrix} C_{44}-\rho c^{2(i)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44}-\rho c^{2(i)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}-\rho c^{2(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {A_{01}}^{(i)} \\ {A_{02}}^{(i)} \\ {A_{03}}^{(i)} \end{pmatrix} = 0$$

Igualado a cero el determinante y resolviendo

$$(C_{44}-\rho c^2)(C_{44}-\rho c^2)(C_{33}-\rho c^2) = 0$$

Vemos que hay dos autovalores uno de ellos degenerado

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \qquad c^{(2)} = c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

Remplazando cada uno de ellos en el sistema de ecuaciones se encuentra los autovectores correspondiente a cada auto valor

$$\begin{gathered} (C_{44}-C_{33}){A_{01}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{01}}^{(1)} = 0 \\ (C_{44}-C_{33}){A_{02}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{02}}^{(1)} = 0 \\ (C_{33}-C_{33}){A_{03}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{03}}^{(1)} = 1 \end{gathered}$$

$${A_{0i}}^{(1)} = (0,0,1)$$

Remplazando los otros dos autovalores

$$\begin{gathered} (C_{44}-C_{44}){A_{01}}^{(2)} = 0 \Rightarrow {A_{01}}^{(2)} = a \\ (C_{44}-C_{44}){A_{02}}^{(2)} = 0 \Rightarrow {A_{02}}^{(2)} = b \\ (C_{33}-C_{44}){A_{03}}^{(2)} = 0 \Rightarrow {A_{03}}^{(2)} = 0 \end{gathered}$$

Normalizando ${A_{0i}}^{(2,3)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b,0)$

Veamos ahora que tipo de onda es cada una, para ello hacemos el producto escalar entre el vector de polarización y el versor que nos da la dirección de propagación

$${A_{0i}}^{(1)} l_i = \left|{A_{0i}}^{(1)}\right| |l_i| \cos\alpha = (0,0,1)(0,0,1) = 1 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longrightarrow {A_{0i}}^{(1)}$$

La onda es longitudinal

$$A_{0i}{}^{(2)} l_i = \left|A_{0i}{}^{(2)}\right| |l_i| \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{a^2+b}}(a,b,0)(0,0,1) = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow A_{0i}{}^{(2)} y\, A_{0i}{}^{(3)} \text{ son } \perp \text{al vector } l_i$$

Luego $A_{0i}{}^{(2)}$ y $A_{0i}{}^{(3)}$ son vectores perpendiculares a la dirección de propagación, son ondas transversales Fig. 5.7

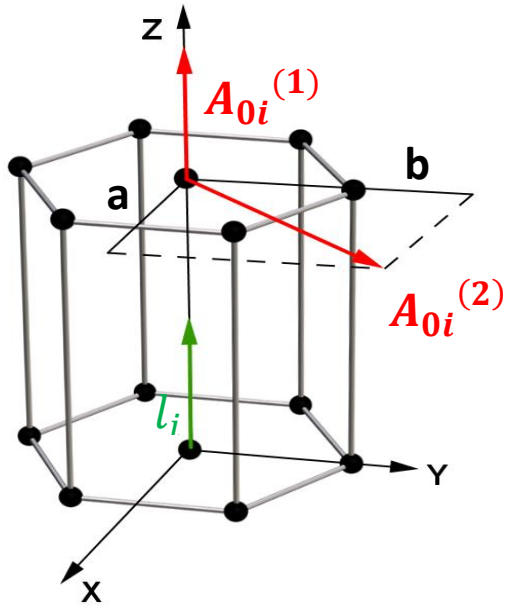


Fig. 5.7

También en este caso tenemos dos velocidades transversales coincidentes.
Sigamos con el mismo tipo de material, pero con un vector de propagación en la dirección del eje x $\quad l_n = (1,0,0)$, en este caso la matriz de Christoffel toma la forma

$$\Gamma_{11} = C_{11} {l_1}^2 = C_{11}$$
$$\Gamma_{22} = C_{66} {l_1}^2 = C_{66}$$
$$\Gamma_{33} = C_{55} {l_1}^2 = C_{55} = C_{44}$$

Solo escribimos los sumandos y términos distintos de cero.
Luego la matriz toma la forma siguiente

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Vemos que en este caso no se repiten términos de la matriz como en los anteriores. El determinante será

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{66}-\rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}-\rho c^2 \end{vmatrix} = (C_{11}-\rho c^2)(C_{66}-\rho c^2)(C_{44}-\rho c^2) =$$

La solución es:

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \qquad c^{(2)} = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \qquad c^{(3)} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$$

Calculando los autovectores para cada autovalor

$$\begin{pmatrix} C_{11}-\rho c^{2(i)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66}-\rho c^{2(i)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}-\rho c^{2(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {A_{01}}^{(i)} \\ {A_{02}}^{(i)} \\ {A_{03}}^{(i)} \end{pmatrix} = 0$$

Para

$$\left(C_{11}-\rho C^{2(i)}\right){A_{01}}^{(i)} \Rightarrow (C_{11}-C_{11}){A_{01}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{01}}^{(1)} = 1$$
$$(C_{66}-C_{11}){A_{02}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{02}}^{(1)} = 0$$
$$(C_{44}-C_{11}){A_{03}}^{(1)} = 0 \Rightarrow {A_{03}}^{(1)} = 0$$

Luego para

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \Longrightarrow {A_{0i}}^{(1)} = (1,0,0) \parallel l_i$$

Es una onda longitudinal

Repitiendo el razonamiento para los restantes autovalores salen dos ondas transversales a distintas velocidades. Fig. 5.8

$$c^{(2)} = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \Longrightarrow {A_{0i}}^{(2)} = (0,1,0) \perp l_i$$

$$c^{(3)} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \Longrightarrow {A_{0i}}^{(3)} = (0,0,1) \perp l_i$$

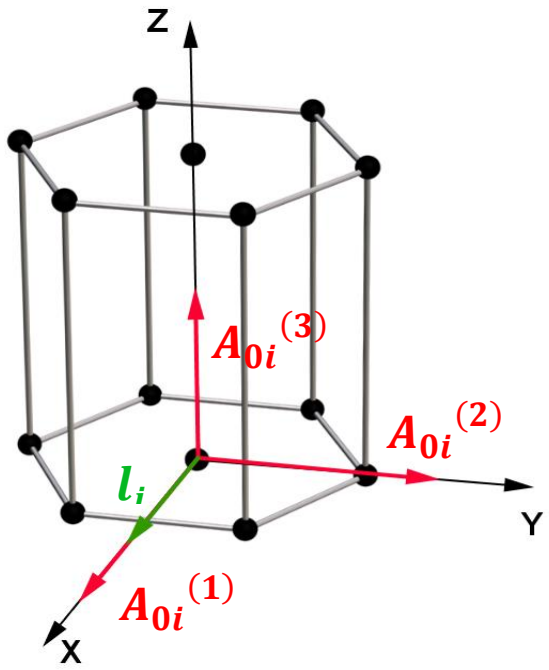


Fig. 5.8

Por primera vez nos encontramos con dos velocidades transversales distintas.

5.2 Estudio de las velocidades en el plano basal de una estructura hexagonal

Partiendo del tensor de las constantes elásticas para la estructura en cuestión

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11}-2C_{66} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11}-2C_{66} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Como trabajamos solo en el plano basal $\check{l}_i = (\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Calculemos el tensor de Chistoffel $\Gamma_{ik} = C_{ijkl} l_j l_l$

$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2 + C_{55}{l_3}^2 + 2C_{56}l_2l_3 + 2C_{51}l_1l_3 + +2C_{61}l_1l_2$$
$$\Gamma_{22} = C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2 + C_{44}{l_3}^2 + 2C_{24}l_2l_3 + 2C_{46}l_1l_3 + 2C_{26}l_1l_2$$
$$\Gamma_{33} = C_{55}{l_1}^2 + C_{44}{l_2}^2 + C_{33}{l_3}^2 + 2C_{34}l_2l_3 + 2C_{35}l_1l_3 + 2C_{45}l_1l_2$$

Reemplazando

$$\Gamma_{11} = C_{11}cos^2\theta + C_{66}sin^2\theta$$
$$\Gamma_{22} = C_{66}cos^2\theta + C_{11}sin^2\theta$$

$$\Gamma_{33} = C_{44}cos^2\theta + C_{44}sin^2\theta = C_{44}$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = 0$$
$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 0$$
$$\Gamma_{ik} = \begin{pmatrix} C_{11}cos^2\theta + C_{66}sin^2\theta & (C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta & 0 \\ (C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta & C_{66}cos^2\theta + C_{11}sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Luego el determinante $\det(\Gamma_{ik} - \rho\delta_{ki}c^2)$ será

$$\begin{vmatrix} C_{11}cos^2\theta + C_{66}sin^2\theta - \rho c^2 & (C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta & 0 \\ (C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta & C_{66}cos^2\theta + C_{11}sin^2\theta - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(C_{44} - \rho c^2)\Big[(C_{11}cos^2\theta + C_{66}sin^2\theta - \rho c^2)(C_{66}cos^2\theta + C_{11}sin^2\theta - \rho c^2) - \big((C_{11} - C_{66})\sin\theta\cos\theta\big)^2\Big]$$

El factor $(C_{44} - \rho c^2)$ nos da una primera raíz, de donde inferimos la velocidad

$$c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

Se vio que esta onda corresponde a una perturbación transversal (manteniendo la representación anterior)

Luego seguimos trabajando sin este factor para aligerar las expresiones.
Realizando las operaciones indicadas se llega

$$\rho^2 c^4 - (C_{11} + C_{66})\rho c^2 - C_{66}C_{11} = 0$$

Ecuación bicuadrada en $x = \rho c^2$ por tanto

$$x^2 = \frac{-(C_{11} + C_{66}) \pm \sqrt{(C_{11} + C_{66})^2 - 4C_{66}C_{11}}}{2} = \frac{(C_{11} + C_{66}) \pm (C_{11} - C_{66})}{2} =$$

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

$$c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}$$

$c^{(3)}$es la velocidad de la otra onda transversal mientras que $c^{(1)}$es la longitudinal. Lo que demuestra que son tres velocidades y distintas, no dependiendo del ángulo de propagación en el plano basal. Graficando las tres velocidades en el plano basal, teniendo en cuenta que para el Zn. $C_{11} = 161GPa$, $C_{44} = 38{,}3GPa$ y $C_{66=}\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \frac{1}{2}(161GPa - 34{,}2GPa) = 63{,}4GPa$ Fig. 5.9

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{161.10^9 Pa}{7140\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 4748\frac{m}{s}$$

$$c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} = \sqrt{\frac{63{,}4.10^9 Pa}{7140\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 2979\frac{m}{s}$$

$$c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{38{,}3.10^9 Pa}{7140\,{}^{Kg}/_{m^3}}} = 2316\frac{m}{s}$$

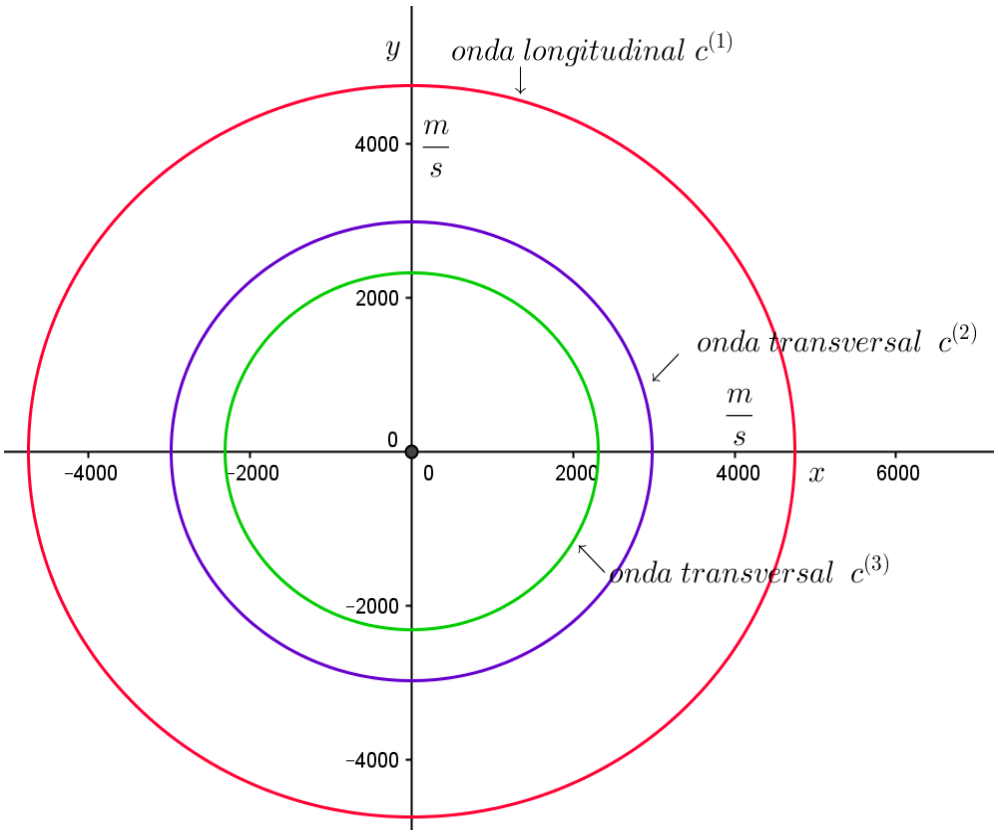


Fig. 5.9

La tabla siguiente muestra las velocidades para los distintos planos de una estructura hexagonal.

Dirección de propagación l_i	*Tipo de onda*	*Velocidad*	*Dirección de polarización*
$(1,0,0)$ *Plano basal*	*Longitudinal*	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$	$(1,0,0)$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$	
$(0,1,0)$ *Plano basal*	*Transversal*	$\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$	
	Longitudinal	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$	$(0,1,0)$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	
$(0,0,1)$	*Transversal*	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	
	Longitudinal	$\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}$	$(0,0,1)$

5.3 Birrefringencia

Fenómeno conocido y ampliamente estudiado en óptica llamado también doble refracción. En ondas elásticas consiste en la separación de las dos ondas transversales cuando se atraviesan ciertos medios anisótropos en determinadas direcciones, como queda claro en el ejemplo de la propagación en una estructura hexagonal. Es debida a que en esas circunstancias las ondas transversales posen distinta velocidad lo que conlleva a una separación temporal entre una y otra. Este fenómeno puede ser utilizado para la caracterización de un determinado en geología, o material en metalurgia.
En el esquema siguiente Fig. 5.10 se observan dos ondas transversales con igual velocidad de propagación, que inciden desde un medio isótropo a otro anisótropo. Cuando entran en este medio suponemos que las velocidades dejan de ser iguales separándose a medida que se propagan en el mismo. Saliendo de este con una diferencia de tiempo Δt. Queda claro que el vector de color rojo indica una

de las ondas transversal, la otra es la de color verde. El interior del cuadrilátero representa la zona anisótropa.

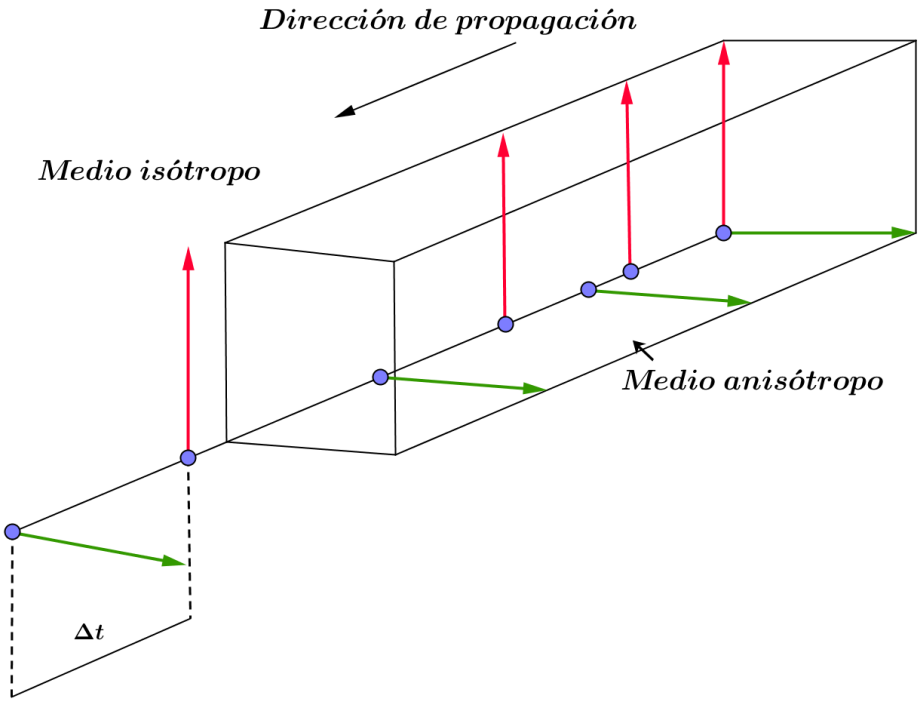


Fig. 5.10

5.4 Generalización

En los casos anteriormente tratados se trabajó con estructuras atómicas o moleculares cristalinas que poseen determinadas simetrías. Sin embargo, estas simetrías pueden ser halladas en materiales no cristalinos, por ejemplo, en materiales compuestos o en algunas estructuras geológicas. En el párrafo anterior resolvimos el caso de una estructura cristalina con simetría hexagonal, esta misma simetría puede hallarse en muestras como la representada en el esquema siguiente, (apilamiento de capas) donde el eje x_3 sería el eje de simetría, o sea que rotando la muestra alrededor de x_3 obtenemos la misma Fig. 5.11, luego es posible aplicar los resultados anteriormente hallados. Por supuesto con el tensor C correspondiente al material que estamos estudiando.

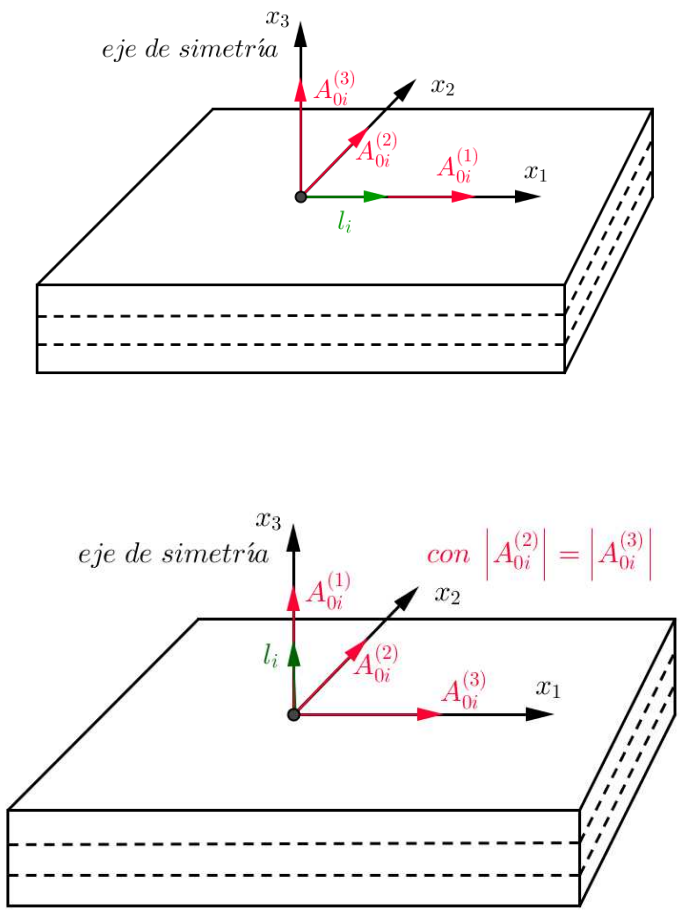


Fig. 5.11

5.5 Caso de estructuras ortotrópico

Como se verá es simple estudiar la propagación en la dirección de los ejes principales, en general hay dos ondas transversales y una longitudinal. Fuera de los ejes principales es más complejo. Se plantean en este caso algunos ejemplos dada las aplicaciones concretas de esta estructura. Es común asimilar este tipo de estructura a materiales como las maderas, membranas biológicas, polímeros reforzados, estructuras geológicas y metales laminados en este último caso las propiedades en la dirección de laminación y en las dos direcciones perpendiculares son diferentes.

Tomando los ejes del sistema de coordenadas como es habitual de acuerdo con las simetrías, ver esquema siguiente Fig. 5.12

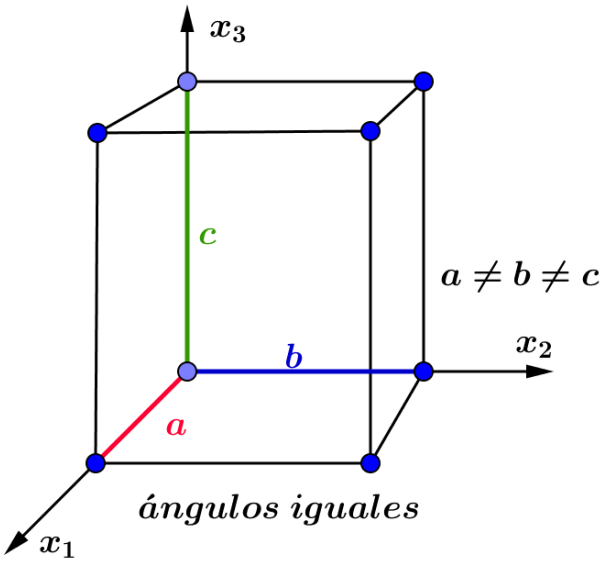


Fig. 5.12

Como fue visto las simetrías de los cristales disminuyen las constantes elásticas, en este caso particular solo prevalecen 9 que son $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}, C_{12}, C_{23}, C_{13}$ quedando la matriz de las constantes elásticas de la forma siguiente

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de Christoffel se reduce

$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2 + C_{55}{l_3}^2$$

$$\Gamma_{22} = C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2 + C_{44}{l_3}^2$$

$$\Gamma_{33} = C_{55}{l_1}^2 + C_{44}{l_2}^2 + C_{33}{l_3}^2$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{12} + C_{66}) l_1 l_2$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = (C_{13} + C_{55}) l_1 l_3$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = (C_{23} + C_{44}) l_2 l_3$$

Considerando el caso $x_3 = 0$

$$\Gamma_{11} = C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2$$

$$\Gamma_{22} = C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2$$

$$\Gamma_{33} = C_{55}{l_1}^2 + C_{44}{l_2}^2$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{12} + C_{66})l_1 l_2$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = 0$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 0$$

La matriz se reduce a

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} - \rho c^2 & \Gamma_{12} & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo se halla la relación de dispersión

$$\Omega = (\Gamma_{33} - \rho c^2)\left[(\Gamma_{11} - \rho c^2)(\Gamma_{22} - \rho c^2) - {\Gamma_{12}}^2\right] = 0$$

Procediendo como es habitual se encuentran el primer auto valor

$$\rho c^{2(1)} = \Gamma_{33}$$

Resolviendo el corchete se llega a una ecuación bicuadrada

$$\rho^2 c^4 - \rho c^2(\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) + \Gamma_{11}\Gamma_{22} - {\Gamma_{12}}^2 = 0$$

$$2\rho c^{2(2)} = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) + \sqrt{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 - 4\left(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - {\Gamma_{12}}^2\right)}$$

$$2\rho c^{2(3)} = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) - \sqrt{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 - 4\left(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - {\Gamma_{12}}^2\right)}$$

Reemplazando en las expresiones las constantes elásticas

$$\rho c^{2(1)} = C_{55}l_1^2 + C_{44}l_2^2$$

$$2\rho c^{2(2)} = (C_{66} + C_{11}l_1^2 + C_{22}l_2^2) + \sqrt{[(C_{66} + C_{11}l_1^2 + C_{22}l_2^2)^2 - 4D]}$$

$$2\rho c^{2(3)} = (C_{66} + C_{11}l_1^2 + C_{22}l_2^2) - \sqrt{[(C_{66} + C_{11}l_1^2 + C_{22}l_2^2)^2 - 4D]}$$

Con

$$D = \left(C_{11}{l_1}^2 + C_{66}{l_2}^2\right)\left(C_{66}{l_1}^2 + C_{22}{l_2}^2\right) - (C_{12} + C_{66})^2 {l_1}^2 {l_2}^2$$

5.6 Grafica de velocidad de fase

Solo por ser una expresión simple trabajemos un poco más con

$$\rho c^{2(1)} = C_{55} l_1^2 + C_{44} l_2^2$$

Tratemos de escribir la expresión en función de un parámetro

$$c^{2(1)} = \frac{C_{55}}{\rho} l_1^2 + \frac{C_{44}}{\rho} l_2^2 = \frac{C_{55}}{\rho} (\cos\theta)^2 + \frac{C_{44}}{\rho} (\operatorname{sen}\theta)^2 =$$

$$\boldsymbol{c_1^{2(1)}} + \boldsymbol{c_2^{2(1)}} = \frac{C_{55}}{\rho} (\cos\theta)^2 + \frac{C_{44}}{\rho} (\operatorname{sen}\theta)^2$$

Luego, se lo puede pensar como componentes de un vector

$$\boldsymbol{c_1^{(1)}} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \cos\theta \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c_2^{(1)}} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \operatorname{sen}\theta$$

Que es la ecuación paramétrica de una elipse con centro en el origen y semiejes

$$a = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

Como se observa en la gráfica Fig. 5.13 suponiendo $a > b$. Obteniendo el lugar geométrico de la velocidad $c^{(1)}$ solamente en el plano $x_3 = 0$

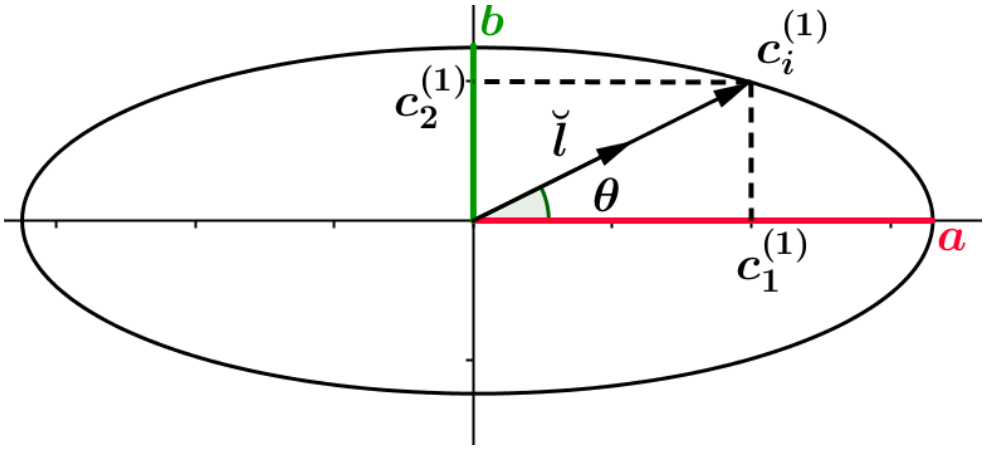


Fig. 5.13

Se ha realizado la descomposición del auto valor $c^{(1)}$en sus dos componentes $c_1^{(1)}$ y $c_2^{(1)}$ según los ejes 1, 2 .

Calculamos ahora las velocidades según determinadas direcciones

Dirección de propagación $\boldsymbol{l_i} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, calculemos los términos de la matriz de Chistoffel

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl} l_j l_l$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} - \rho c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} = 0$$

Luego el determinante tendrá tres raíces distintas

$$(C_{55} - \rho c^2)(C_{11} - \rho c^2)(C_{66} - \rho c^2) = 0$$

Las velocidades serán

$$c^{(1)} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \ , \ c^{(2)} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \ , \ c^{(3)} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} \ ,$$

Observando que coincide con el resultado obtenido anteriormente si hacemos $\theta = 0$

$$\boldsymbol{c_1^{(1)}} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \cos\theta = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}}$$

Procediendo de igual maneras y calculando los autovectores de $c^{(1)}$ se puede confeccionar la tabla siguiente para la estructura ortotrópico.

Dirección de propagación l_i	*Tipo de onda*	*Velocidad*
$(1,0,0)$	*Longitudinal*	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}$
$(0,1,0)$	*Transversal*	$\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$
	Longitudinal	$\sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$
$(0,0,1)$	*Transversal*	$\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}$
	Transversal	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$
	Longitudinal	$\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}$

5.7 Cálculo de la velocidad de grupo, graficas de lentitud y velocidad de grupo para estructuras octaédricas

La velocidad de fase se halla como autovalor de la matriz de Christoffel, la velocidad de grupo puede ser determinada a partir de la relación de dispersión

$$\Omega = \Omega[k_i, \omega].$$

Si no tenemos acceso a la función de dispersión explicita

$$\omega = f(k_1, k_2, k_3) = f(k_i)$$

se debe trabajar con la implícita, como es habitual en muchos casos.

$$\Omega(k_i, \omega) = 0$$

La función de dispersión implícita $\Omega = \Omega(k_i, \omega)$ la podemos interpretar como una función cuyas curvas de nivel serán $\Omega(k_i, \omega) = cont.$, en particular $\Omega(k_i, \omega) = 0$ que es la función de dispersión implícita, luego,

$f(k_i)$ es superficie de nivel de $\Omega(k_i, \omega)$

Por tanto, como se vio, la velocidad de grupo se puede calcular como

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \vec{\nabla}_k f$$

O bien

$$\vec{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}} = \frac{\vec{\nabla}_k \Omega}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}}$$

como también

$$c_{gq} = \frac{\partial \omega}{\partial k_q} = \frac{C_{ijkq}\alpha_i \alpha_k l_j}{\rho c}$$

O

$$\vec{c}_g = \vec{\nabla}_k (kc) = \left(\frac{\partial (kc)}{\partial k_i} \right)$$

veamos el primer caso $\Omega = C_{55}k_1^2 + C_{44}k_2^2 - \rho\omega^2 = 0$ reemplazando

$$l_1 = \frac{k_1}{k} \ , \quad l_2 = \frac{k_2}{k} \ , \ l_3 = \frac{k_3}{k} \quad \text{y} \quad \omega = kc$$

Luego, calculando el gradiente de manera implícita

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} = 2C_{55}k_1 \ , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial k_2} = 2C_{44}k_2 \ , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial k_3} = 0 \ , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = -2\rho\omega$$

$$\vec{c}_g = -\frac{\nabla_k \Omega}{\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}} = \frac{1}{\rho\omega}[C_{55}k_1,\ C_{44}k_2, 0] = \left[\frac{C_{55}}{\rho}\left(\frac{k_1}{\omega}\right), \frac{C_{44}}{\rho}\left(\frac{k_2}{\omega}\right), 0 \right]$$

Calculemos para este caso la **gráfica de lentitud**, para tal fin es conveniente un cambio de coordenadas, como

$$k_i = k l_i = \frac{\omega}{c^{(1)}} l_i = \omega m_i$$

donde $m_i = \frac{1}{c} l_i$ es la lentitud con las propiedades siguientes

$$m_i m_i = \frac{1}{c^{2(1)}} l_i l_i = \frac{1}{c^{2(1)}} = m^2$$

$$C_{55} k_1^2 + C_{44} k_2^2 - \rho\omega^2 = 0$$

Despejando ω^2

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho} C_{55} k_1^2 + \frac{1}{\rho} C_{44} k_2^2 = \frac{1}{\rho} C_{55} (\omega m_1)^2 + \frac{1}{\rho} C_{44} (\omega m_2)^2$$

$$\frac{1}{\rho} C_{55} (m_1)^2 + \frac{1}{\rho} C_{44} (m_2)^2 = 1$$

$$\frac{{m_1}^2}{\left(\sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}}\right)^2} + \frac{{m_2}^2}{\left(\sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}}\right)^2} = 1$$

Resulta ser la ecuación de una elipse con centro en el origen. Para poder comparar con la curva anteriormente hallada de la velocidad de fase pasemos a paramétricas,

$$\frac{{m_1}^2}{\left(\sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}}\right)^2} = (\cos\theta)^2 \quad \text{y} \quad \frac{{m_2}^2}{\left(\sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}}\right)^2} = (\operatorname{sen}\theta)^2$$

Luego

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}} \cos\theta \quad \text{y} \quad m_2 = \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}} \operatorname{sen}\theta$$

Anteriormente llamamos a

$$a = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

y supusimos que $a > b$, en este caso, (de lentitud), vemos que los semiejes $\acute{a}$ y $\acute{b}$ son los inversos, por tanto, la gráfica de lentitud (esquema) será la siguiente Fig. 5.14

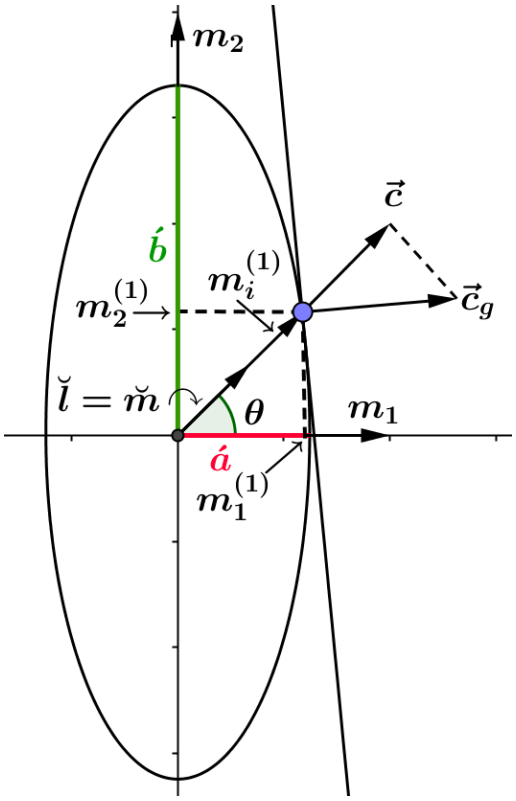


Fig. 5.14

En algunos casos en los ejes suele aparecer $\frac{k_i}{\omega}$ en lugar de m_i .

Sigamos con las expresiones de las otras velocidades de grupo que son más complejas

$$\Omega = [(C_{11}l_1^2 + C_{66}l_2^2 - \rho c^2)(C_{66}l_1^2 + C_{22}l_2^2 - \rho c^2) - (C_{12} + C_{66})l_1^2 l_2^2] = 0$$

Reemplazando los l_i

$$\Omega = [(C_{11}k_1^2 + C_{66}k_2^2 - \rho\omega^2)(C_{66}k_1^2 + C_{22}k_2^2 - \rho\omega^2) - (C_{12} + C_{66})k_1^2 k_2^2]=0$$

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k_1} = 2C_{11}k_1(C_{66}k_1^2 + C_{22}k_2^2 - \rho\omega^2) + 2C_{66}k_1(C_{11}k_1^2 + C_{66}k_2^2 - \rho\omega^2) - 2(C_{12} + C_{66})k_1k_2^2$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k_2} = 2C_{66}k_2(C_{66}k_1^2 + C_{22}k_2^2 - \rho\omega^2) + 2C_{22}k_2(C_{11}k_1^2 + C_{66}k_2^2 - \rho\omega^2) - 2\,(C_{12} + C_{66})k_2k_1^2$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = -2\rho\omega(C_{66} + C_{11}k_1^2 + C_{22}k_2^2 - 2\rho\omega^2)$$

Sustituyendo los valores adecuados se obtienen la velocidad de grupo, las gráficas no son tan fáciles de obtener.

Ejercicio

Con el objeto de comprender mejor el comportamiento de los distintos vectores y su relación con las gráficas de velocidad de fase y lentitud se presenta el siguiente problema. Si bien no responde enteramente a la realidad nos permitirá cumplir el objetivo propuesto. Se parte de valores de velocidad totalmente arbitrarios, por supuesto, se supone un medio dispersivo (elíptico) cuya curva de velocidad de dispersión se observa en color negro en la Fig. 5.15. Suponiendo la relación siguiente de los semiejes de la elipse $a < b$.

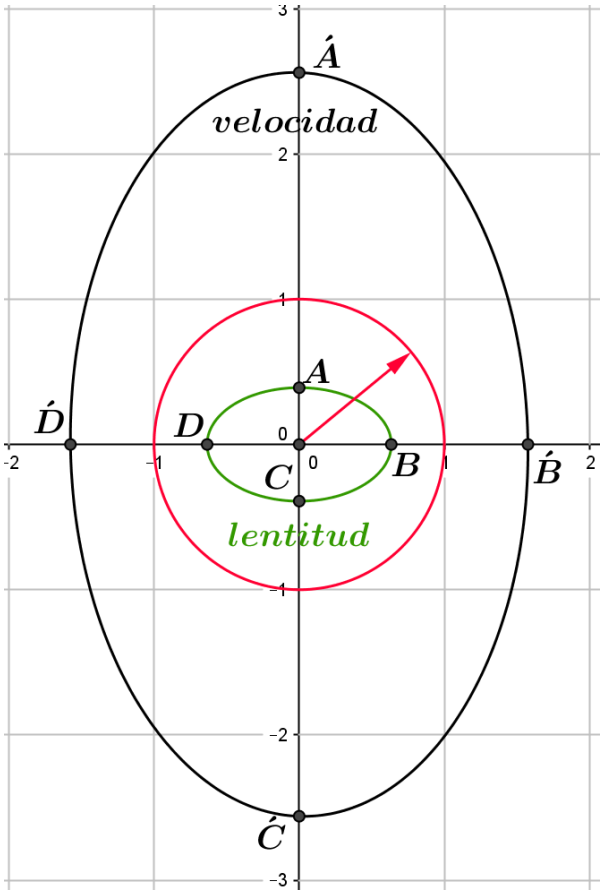


Fig. 5.15

Usando el utilitario GeoGebra, el cual se adapta especialmente para trabajos geométricos. Hallamos la inversión de esta elipse respecto de una circunferencia de radio unitario, esto nos posibilita dibujar la curva de lentitud rápidamente, teniendo el mismo centro ambas elipses. La lentitud esta dibujada en color verde en la Fig. 5.15.La circunferencia de color rojo y radio unitario es la que posibilito realizar la inversión, cumpliendo (donde umi son unidades arbitrarias).

$$\overline{OB}\overline{OB'} = 0{,}63uni.\,1{,}58umi = 1$$

En la Fig.5.16 se representó el vector velocidad de fase $\vec{c}$ el cual describe la curva velocidad de fase al ir cambiando la dirección de propagación. De manera similar el vector lentitud $\vec{m}$ determina la gráfica de lentitud. Trazando la recta tangente a la curva de lentitud se obtiene la perpendicular a la curva de lentitud cuyo versor es $\vec{n}$ y nos indica la dirección de la velocidad de grupo $\vec{c}_g$

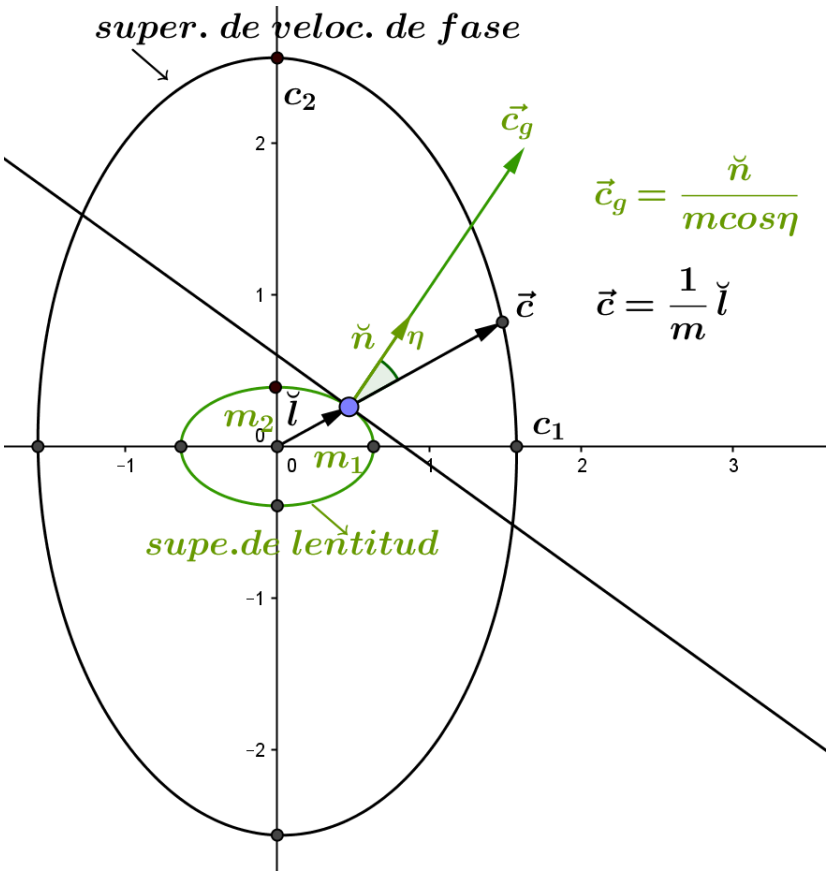


Fig.5.16

En el punto seleccionado la velocidad de fase en el grafico original vale $c \cong 1{,}69cm$ luego la lentitud debe valer $m \cong 0{,}54cm$, como se verifico. El ángulo entre es de $\eta \cong 27{,}01^{\circ}$ por tanto

$$\vec{c}_g = \frac{\vec{n}}{m\cos\eta} = \frac{\vec{n}}{0{,}54\cos 27{,}01^{\circ}} = 2{,}07cm\,\vec{n}$$

Vemos también en la Fig.5.17 que si se prolonga el vector velocidad de grupo hacia el eje de las accisas interfiere al mismo en un punto distinto del origen de coordenada. Un detalle (ampliación) de lo comentado se observa en la Fig.5.17 la diferencia entre ambos puntos está representada por el segmento rojo, esto genera una consecuencia experimental concreta que seguidamente comentaremos.

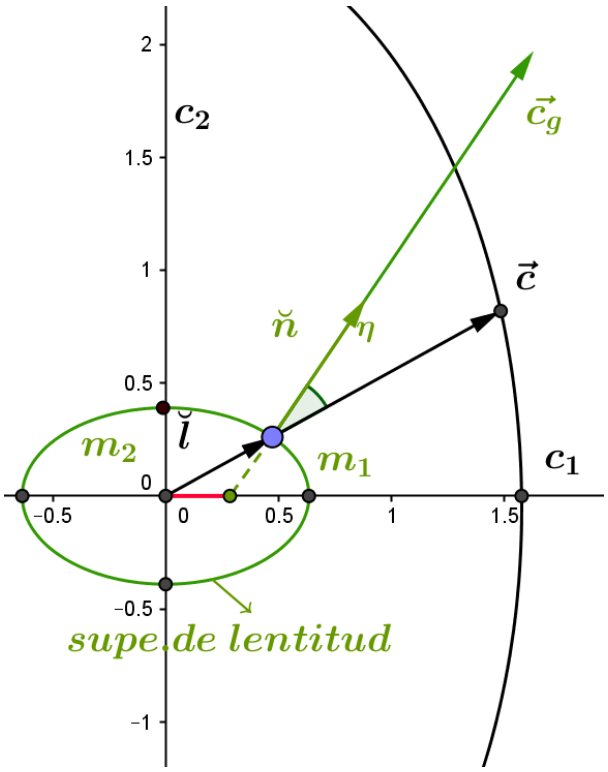


Fig.5.17

5.8 Diferencia en la posición de la fuente puntual

Imaginemos como en el caso anterior una fuente isótropa en un medio no-homogéneo. Representemos el frente de onda, que suponemos elíptico, como se observa en la Fig.5.18 . Trazamos la tangente al frente de onda en un punto del mismo, la perpendicular nos da la dirección de propagación $\vec{l}$ o bien $\vec{k}$, luego, al dibujar los vectores velocidad vemos que los orígenes de los mismos son distintos. Si un pulso es emitido por un transductor de onda plano. Los frentes de onda se desplazan en la dirección de $\vec{k}$ que es normal a la superficie del transductor, pero el paquete, la energía, se desplaza en una dirección distinta a la de $\vec{k}$. Esto significa que el detector que realiza la recepción de la onda debe ser desplazado para captar la onda transmitida.

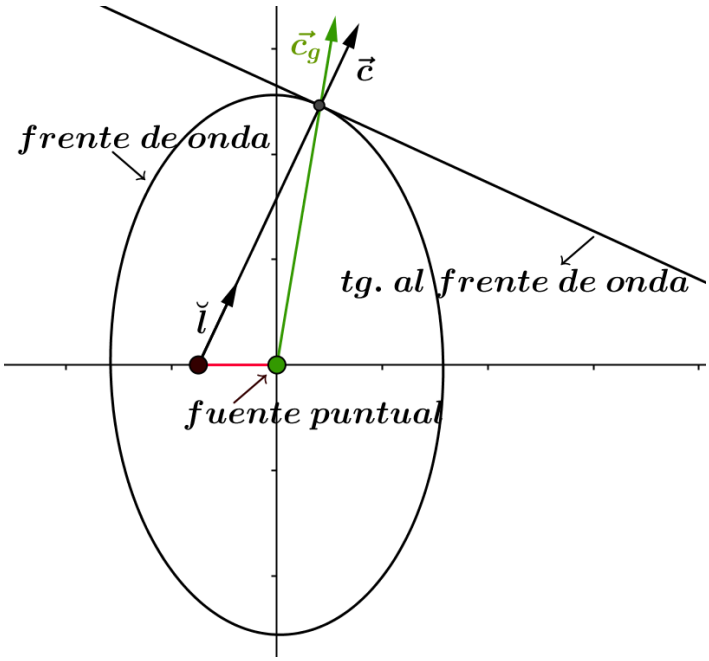


Fig.5.18

Como se ha visto en otros ítems, vemos nuevamente, que unas de principales características de la propagación de las ondas elásticas en los sólidos anisótropos es que la dirección del flujo de energía dada por la velocidad de grupo no es colineal con la velocidad de fase esto conlleva a fenómenos particulares, como el mencionado. Fig.5.19

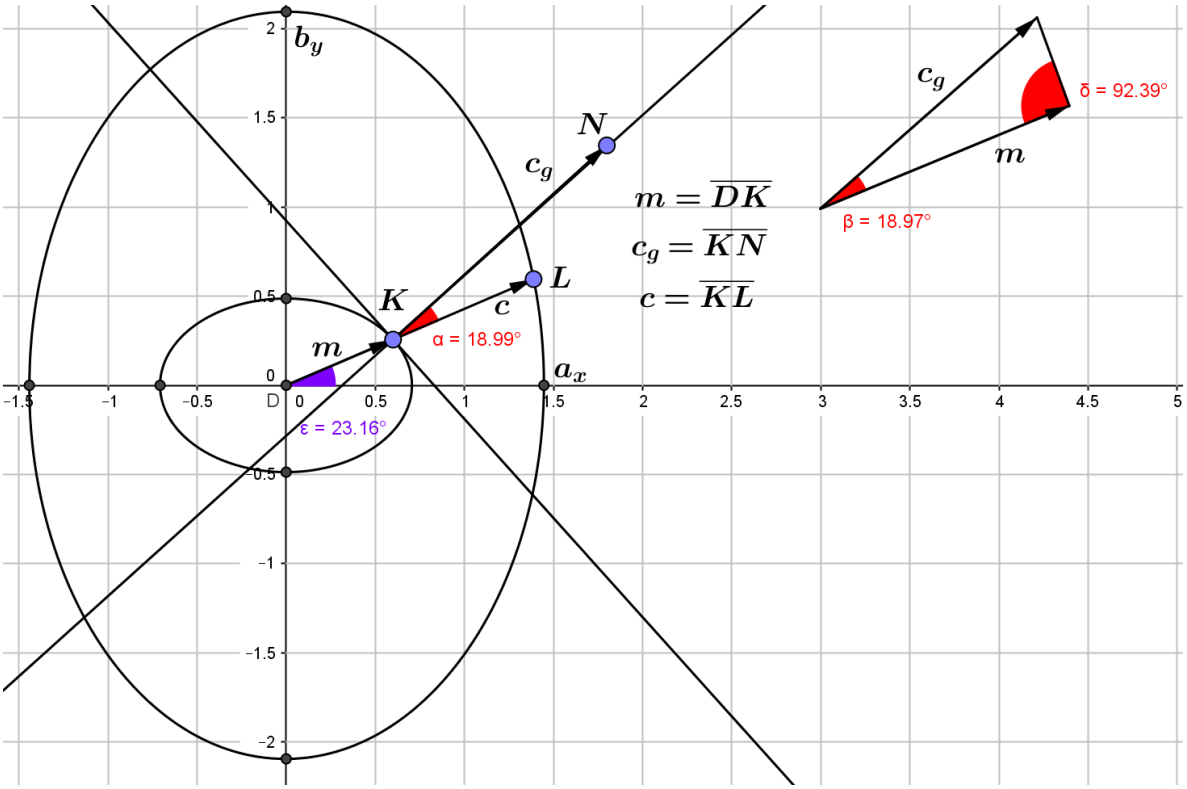


Fig.5.19

5.9 Ecuación Eikonal, Teoría del Rayo

En este apartado se presenta los elementos básicos de la teoría de rayos

Esta aproximación es muy utilizada en la teoría de ondas (sísmica, óptica y ondas electromagnéticas). Además, es posible aplicar estas ideas a temas como el modelado y los problemas inversos en las técnicas de ensayos no-destructivos.

La propagación de ondas elásticas en un sólido está caracterizada por las ecuaciones de ondas. Estas expresiones son en derivadas parciales de segundo orden. En general, resolver estas ecuaciones para una un dominio complicado es difícil, solamente para casos simples se encuentra una solución analítica. La teoría de rayos permite una aproximación, para aquellos casos en que las escalas lo permitan, es decir, que la longitud de onda de la señal sea muy pequeña comparada con la dimensión del objeto en estudio. Por tanto, es posible conocer el comportamiento de una onda estudiando la trayectoria que describió. La teoría del rayo es una alternativa aproximada a la solución de la ecuación de onda.

Comencemos definiendo algunos parámetros inherentes al rayo La forma más simple de la ecuación del potencial escalar en 3D es

$$\nabla^2\varphi(x_i,t)=\frac{1}{c^2\,(x_i)}\frac{\partial^2\varphi(x_i,t)}{\partial t^2}$$

y es válida estrictamente en un medio homogéneo (notar que la velocidad depende de la posición). Trabajaremos con una onda plana. Los frentes de onda son superficies de fase constante ($(k_i x_i-\omega t)$ y planos perpendiculares a la dirección de propagación. La solución de la ecuación de onda con variaciones suaves de las constantes elásticas del medio puede ser

$$\varphi(\vec{x},t)=A(\vec{x})e^{i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}$$

El rayo está definido como la trayectoria ortogonal al frente de onda y su ecuación es una curva paramétrica del tipo $x=x(s),\ y=y(s),\ z=z(s)$, utilizamos como parámetro la longitud de la curva s. Reemplazando en la ecuación de onda una solución del tipo $\varphi(\vec{x},t)=A(\vec{x})e^{-i\omega T(x)}$ donde $T(x)=\left(\frac{x}{c}-t\right)$ y operando con los operadores

$$\nabla^2\varphi(x_i,t)=\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\left(A(\vec{x})e^{-i\omega T(x)}\right)\right]$$

$$\vec{\nabla}\left(A(\vec{x})e^{-i\omega T(x)}\right)=\vec{\nabla}Ae^{-i\omega T(x)}-i\omega A\vec{\nabla}Te^{-i\omega T(x)}$$

luego

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}Ae^{-i\omega T(x)}-i\omega A\vec{\nabla}Te^{-i\omega T(x)}\right]\\&=\left[\nabla^2A-i\omega\vec{\nabla}A.\vec{\nabla}T-i\omega\vec{\nabla}A.\vec{\nabla}\mathrm{T}-\mathrm{i\omega A}\nabla^2T+(i\omega)^2\vec{\nabla}T.\vec{\nabla}TA\right]e^{-i\omega T(x)}\\&=\left[\nabla^2A-\omega^2A\left|\vec{\nabla}T\right|^2-i\left(2\omega\vec{\nabla}A.\vec{\nabla}T+\omega A\nabla^2T\right)\right]e^{-i\omega T(x)}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(i\omega Ae^{-i\omega T(x)}\right)=-\omega^2Ae^{-i\omega T(x)}$$

Por tanto

$$\left[\nabla^2A-\omega^2A\left|\vec{\nabla}T\right|^2-i\left(2\omega\vec{\nabla}A.\vec{\nabla}T+\omega A\nabla^2T\right)\right]e^{-i\omega T(x)}=-\frac{\omega^2}{c^2\,(x_i)}Ae^{-i\omega T(x)}$$

Separando la parte real

$$\nabla^2 A - \omega^2 A\left|\vec{\nabla}T\right|^2 = -\frac{\omega^2}{c^2\,(x_i)}A$$

Despejando $(\nabla T)^2$

$$\left|\vec{\nabla}T\right|^2 - \frac{1}{c^2\,(x_i)} = -\frac{\nabla^2 A}{A\omega^2}$$

Suponiendo que la frecuencia es elevada, nos queda

$$\left|\vec{\nabla}T(x_i)\right| = \frac{1}{c(x_i)}$$

Esta ecuación se conoce como Eikonal y tiene unidades de tiempo. Podemos obtener información sobre el comportamiento de las ondas al considerar la trayectoria del rayo asociado con ellas. Este enfoque, que estudia la propagación de ondas utilizando la trayectoria del rayo, se llama teoría del rayo geométrico. Aunque no describe completamente los aspectos importantes de la propagación de ondas, se usa ampliamente porque a menudo simplifica el análisis y proporciona una buena aproximación.

El gradiente de un frente de onda en una posición x_i (superficie de igual fase) es igual a la lentitud local. La dirección del cambio máximo del frente de onda define la dirección de propagación de la onda. También observamos que los rayos son perpendiculares a los frentes de onda. La lentitud nos da el gradiente del tiempo de viaje, y el gradiente del tiempo de viaje especifica la dirección del rayo. Cada vez que $c(x_i)$ cambia, el gradiente de T tiene que cambiar, y la dirección de propagación cambia al mismo tiempo.

5.10 Ecuación de la Trayectoria del Rayo

Sabemos que una curva en el espacio está dada por tres ecuaciones paramétricas $x_i = x_i(t)$ donde t, es el parámetro que al variar describe la curva. Estas tres

ecuaciones pueden expresarse por una sola ecuación vectorial Fig.5.20

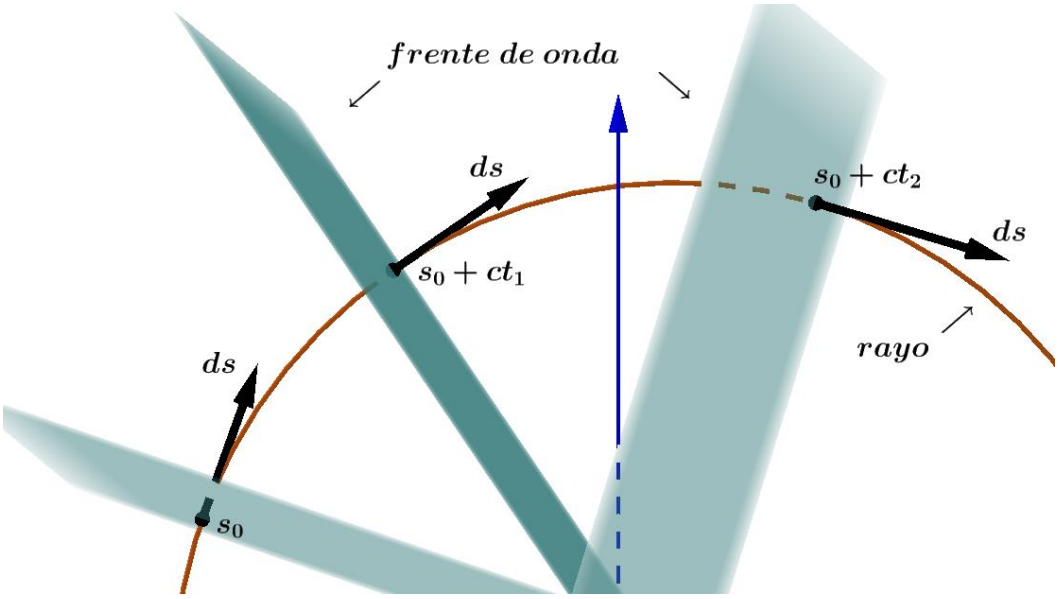


Fig.5.20

$$\vec{r} = x_1(t)\breve{I} + x_2(t)\breve{J} + x_3(t)\breve{K}$$

Se define la derivada de $\vec{r}$ respecto de t, como el vector $\vec{n}$ que tendrá la dirección de la tangente a la curva. Recordemos, también, que se puede definir el elemento de arco ds como

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$$

Vemos que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \breve{n}$$

Por tanto $\breve{n}$ es un vector unitario y tangente a la curva. Recordando la Ecuación Eikonal

$$\left|\vec{\nabla}T(x_i)\right| = \frac{1}{c(x_i)} \quad \therefore \quad \vec{\nabla}T(x_i) = \frac{\breve{n}}{c(x_i)}$$

Si medimos la distancia a lo largo de la trayectoria del rayo por el arco recorrido s, luego el cambio de $\vec{\nabla}T(x_i)$ a lo largo de la trayectoria será

$$\frac{d\vec{\nabla}T(x_i)}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}; \frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}; \frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_3}{ds}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_1}{ds}\right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_3}{ds}; \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_1}{ds}$$
$$\left.+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}; \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds}\right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}; \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds}$$
$$\left.+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}\right] =$$

$$= \frac{d}{dx_i}\left[\left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} + \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}; \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} + \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds}\right.$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}; \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{ds} + \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_2}\right)\frac{dx_2}{ds} + \left(\frac{\partial T(x_i)}{\partial x_3}\right)\frac{dx_3}{ds}\right]$$

Luego se tiene

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{\nabla}T(x_i)\right) = \frac{d}{dx_i}\left(\vec{\nabla}T(x_i).\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

Pero $\frac{d\vec{r}}{ds} = \check{n}$ y $\vec{\nabla}T(x_i) = \frac{\check{n}}{c(x_i)}$ entonces

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{\nabla}T(x_i)\right) = \frac{d}{dx_i}\left(\vec{\nabla}T(x_i).\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\check{n}}{c(x_i)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(x_i)}\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{1}{c(x_i)}\right)$$

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{1}{c(x_i)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(x_i)}\frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$

Esta ecuación nos dice que los cambios en la velocidad de la onda están relacionados con los cambios en la geometría del rayo. En algunos textos puede ser escrita en función de la lentitud;

$$\frac{d}{ds}\left(m(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{dx_i}\left(m(\vec{r})\right) = \vec{\nabla}m(\vec{r})$$

Veamos algunas consecuencias:

Se ve, que si se permanece en un medio homogéneo de velocidad constante los rayos son rectas y no cambian de dirección, puesto que $\vec{\nabla} m(\vec{r}) = 0$

$$m(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds} = const.$$

Una consecuencia inmediata es la ley de Snell. Si no hay cambios en la dirección de x_i , entonces

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{1}{c(x_i)}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(x_i)}\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{c(x_i)}\frac{d\vec{r}}{ds} = const. \Rightarrow \frac{sen\alpha}{C} = const$$

La función sen se introduce con $\frac{d\vec{r}}{ds} = \breve{n}$

Ejemplos

Un aplicación interesante se da en acústica submarina y en sísmica y es donde la velocidad depende solo de la profundidad z , luego $c = f(z)$. Se comienza planteando las ecuaciones del rayo para x e y

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(x_i)}\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{1}{c(x_i)}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(z)}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c(z)}\right) = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{c(z)}\frac{dx}{ds} = K_1 = const.$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(z)}\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{c(z)}\right) = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{c(z)}\frac{dy}{ds} = K_2 = const.$$

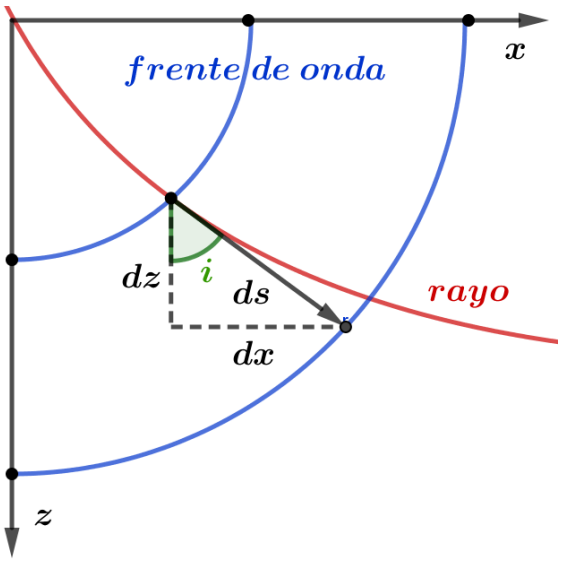


Fig.5.21

Por tanto

$$ds = \frac{dx}{c(z)K_1} = \frac{dy}{c(z)K_2}$$

$$dy = \frac{K_2}{K_1}\,dx$$

Que integrando nos da una recta en el plano (x, y) lo cual indica que el rayo se encuentra en un plano que contiene a esta recta. Luego, podemos elegir a este plano, quedando las ecuaciones en el plano (x, z), sin pérdida de generalidad, luego

$$\frac{1}{c(z)}\frac{dx}{ds} = \frac{sen\, i}{c(z)} = p$$

Donde p es una constante llamada parámetro del rayo, mientras que el ángulo i se lo observa en el esquema y se llama ángulo de incidencia. La segunda ecuación será

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(z)}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(z)}\cos i\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c(z)}\cos i\right) = -\frac{1}{c(z)}sen\, i\,\frac{di}{ds} + \cos i\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right)\frac{dz}{ds} =$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right) = -\frac{1}{c(z)}sen\, i\,\frac{di}{ds} + (\cos i)^2\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right)$$

Despejando $\frac{di}{ds}$

$$-\frac{di}{ds} = c(z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{c(z)}\right) sen\, i$$

$$\frac{di}{ds} = \frac{sen\, i}{c(z)}\frac{dc}{dz} = p\frac{dc}{dz}$$

$$\frac{di}{ds} = p\frac{dc}{dz}$$

La $\frac{di}{ds}$ nos indica como varia el ángulo de incidencia con la posición s, (curvatura) vemos, también, que i depende del cambio de la velocidad. Fig.5.21

Si c es constante $\frac{di}{ds}$=0, luego no hay variación del ángulo el rayo es una recta de curvatura cero.

Si la velocidad es una función lineal de la profundidad $c(z) = az + b$

$$\frac{di}{ds} = p\frac{dc}{dz} = pa = const.$$

Luego los rayos son arcos de circunferencia de radio $R = \left(\frac{di}{ds}\right)^{-1} = (pa)^{-1}$

Un modelo discreto que justifica el cambio de la trayectoria del rayo en un gradiente de velocidad positivo puede observarse en la Fig.5.22

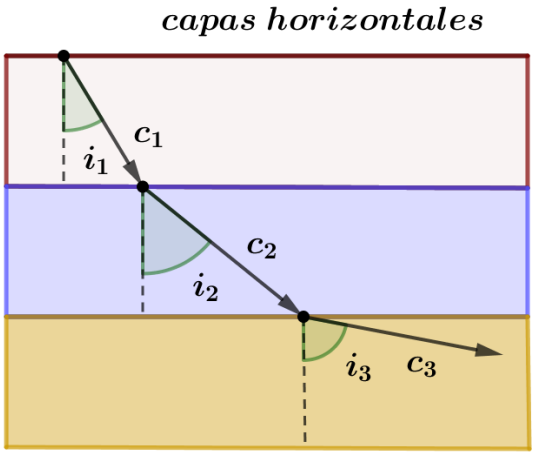


Fig.5.22

Si la fuente se localiza en la capa superior, a medida que penetra se encuentra con capas de mayor velocidad hasta que llega a $i = 90°$, ese punto es llamado de

retorno. Podemos imaginar capas infinitamente pequeñas en donde la velocidad cambia punto a punto.

Nota sobre curvatura

Consideremos una curva plana en el plano (x, y) como la que observamos en la Fig.5.23 La pendiente o ángulo de la tangente a la curva en un punto A, medido respecto a una recta paralela al eje z lo llamamos i

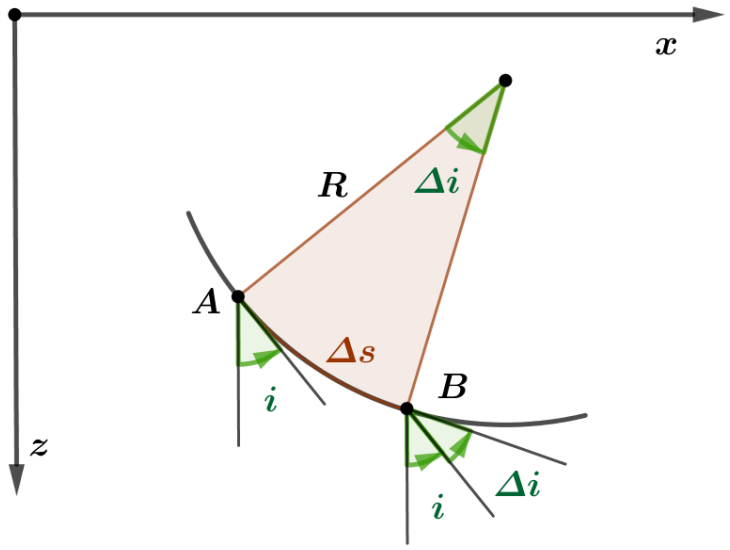


Fig.5.23

Si nos movemos sobre la curva un ángulo pequeño Δi llegamos al punto B, donde el ángulo cambio $i + \Delta i$. La longitud del arco al pasar de A a B es Δs y puede expresarse como $\Delta s = R\Delta i$, luego, el cambio del ángulo de la tangente relativa al incremento del arco en un punto se lo llama curvatura, en ese punto y se lo designa con la letra $\aleph$ y se lo calcula

$$\aleph = \frac{di}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathrm{i}}{\Delta \mathrm{s}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \mathrm{sr}} = \frac{1}{R}$$

$$\aleph^{-1} = \left(\frac{di}{ds}\right)^{-1} = R$$

En general, en el caso de curvas planas la curvatura será una función de la posición a lo largo de la curva.

Ejemplos

Veamos un ejemplo de geología sucede algo similar a lo visto en el capítulo 1, con el SOFAR para introducir la problemática partimos de un rayo que incide sobre una superficie horizontal, como se observa en el esquema. Fig.5.24 y con el fin de adentrarnos en el tema hacemos una simple aplicación de la ley de Snell. Una onda plana con velocidad constante c incide sobre una interface horizontal. Sobre el rayo los frentes de onda están separados una distancia Δs y en tiempo están distanciados Δt, mientras que en la interface la distancia de separación es Δx, el ángulo de incidencia es i .Luego se puede escribir

$$\Delta s = \Delta x \; sen \; i$$

Y como $\Delta s = c\Delta t$, entonces

$$\Delta s = c\Delta t = \Delta x \; sen \; i$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{sen \; i}{c} = m \; sen \; i = p$$

Donde p es constante para cada rayo y observamos, también, que tiene unidades de lentitud, luego es llamada también lentitud aparente en la dirección horizontal, su inversa será la velocidad aparente de la onda.

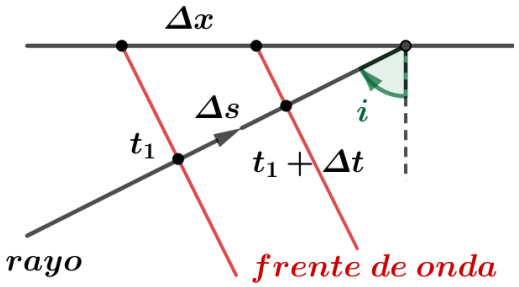


Fig.5.24

Desde el punto de vista geológico, si la interface representa la superficie de la tierra y si los puntos de intercepción del frente de onda con la superficie se encuentran próximos, de manera tal, que se pueda suponer a la interface plana. Sera posible calcular p midiendo Δt y Δx.

Sabemos que si hay más de una interface paralela el mismo rayo las atraviesa, conservando p , solo cambiando la dirección. Si el gradiente de velocidad no solo depende de la profundidad z, o sea $c = c(x, y, z)$, entonces p cambia. En el caso de la tierra, generalmente, también la velocidad aumenta con la profundidad, si este aumento es lineal los rayos describen semicírculos. Cuando el ángulo $i = 90°$ está en su punto de retorno.

5.11 Nota (solo para curiosos)

Veamos una interpretación del desarrollo anterior, que puede o no tener relación con los temas precedentemente tratados. Si la velocidad de la onda es lineal con z los rayos en ese medio serán semicírculos. Ver la Fig.5.25

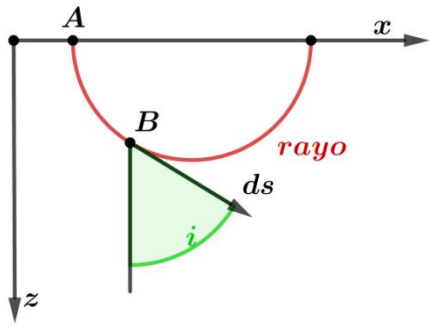


Fig.5.25

En la expresión $\frac{di}{ds} = p\frac{dc}{dz}$ se observa que en la medida que nos acerquemos a un punto sobre el eje x la velocidad tiende a cero y sabemos que para un mismo rayo p es constante, luego podemos suponer que $\frac{di}{ds} \to 0$, o sea que a partir de ese punto estaríamos en presencia de una recta, esta afirmación contradice nuestra imagen geométrica habitual de recta. Pero no importa, por un instante llamamos "rectas" a las semicircunferencias con el centro en el eje x, los ángulos formados por estas "rectas" serán los ángulos que forman las tangentes en sus puntos de intercepción. Siguiendo de esta forma encontraremos una serie de premisas similares a las que conocemos en la geometría común o Euclidiana. Veamos más; sabemos que por dos puntos se puede trazar una y solo una recta, en nuestro caso sería; en un semiplano se puede trazar solo una semicircunferencia con centro en el eje x. Entendemos por paralelas las rectas que no se cortan o bien se cortan en el infinito, en nuestro caso sería dos semicircunferencias que tienen un punto en común en el eje x Fig.5.26

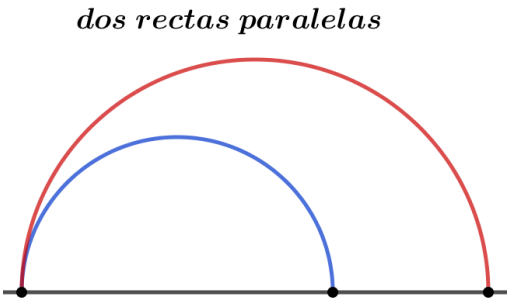


Fig.5.26

Veamos el caso más sugestivo: Por un punto exterior A Fig.5.27 a una recta a se pueden trazar más de una recta paralelas, b, c a la dada a

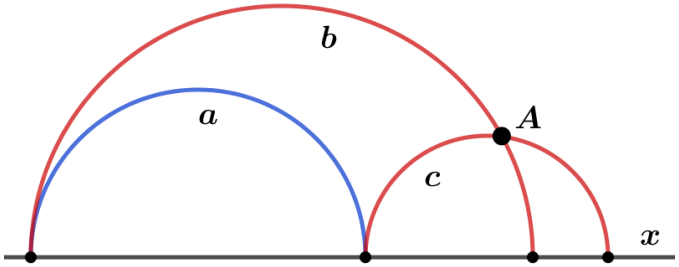


Fig.5.27

Hemos presentado una introducción muy elemental a la geometría no-Euclidia de Lobachevski o también llamada hiperbólica en el plano, el así llamado modelo de Poincaré.

6

"Cuando creíamos que teníamos todas las respuestas,
de pronto, cambiaron todas las preguntas."
Mario Benedetti

Capítulo 6 - ONDAS SUPERFICIALES

6.1 Ondas de Rayleigh

En los medios solidos isótropos ilimitados existen dos tipos de ondas, de dilatación (ondas-p) y de corte (ondas-s). Si el medio es limitado próximo a la superficie aparece otro tipo de onda, llamada de superficie, pues solo existen en las proximidades de la superficie. Siendo similares a las ondas superficiales que aparecen en los líquidos (ondas de gravedad). Lord Rayleigh predijo su existencia en 1887 y R. Oldham en 1900 los observo por primera vez en sismogramas.

Consideremos un medio semi-infinito elástico con una superficie libre de tensiones coincidente con el plano x_1, x_3, con el x_3 positivo hacia el interior del sólido. La onda superficial suponemos que viaja en la dirección de x_1 positivas. Fig.6.1

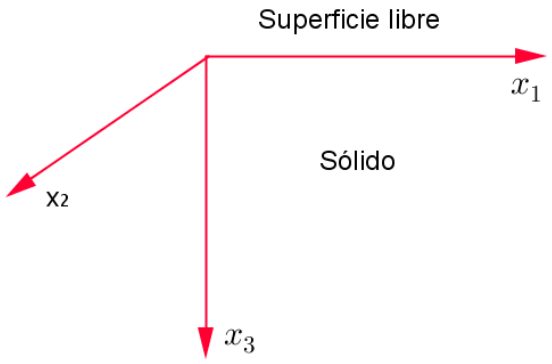


Fig.6.1

Seguidamente tratamos de encontrar sus propiedades.

Los desplazamientos de u_2 deben ser cero también debe ser cero x_2, puesto que planteamos un problema de tensiones plano.

$$u_1 = u_1(x_1, x_3, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3}$$

$$u_2 = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3}$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_3, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}$$

Quedando

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}$$

Donde $\varphi = \varphi(x_1, x_3, t,)$ y $\Psi_2 = \Psi_2(x_1, x_3, t,)$, observe que el campo vectorial $\overrightarrow{\Psi} = (0, \Psi_2, 0)$ tiene una componente en dirección x_2 sin embargo estamos en un problema plano, ¿por qué?. Por simplicidad llamamos $\Psi_2 = \Psi$.

Recordando las ecuaciones de onda en función de los potenciales

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \overrightarrow{\Psi} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{\Psi}}{\partial t^2} = 0$$

Remplazando queda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Suponiendo, en principio, ondas armónicas temporalmente ($e^{-i\omega t}$ ó e^{-ikct}) , derivando

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega\varphi \implies \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2\varphi$$

De igual manera

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi$$

Luego

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_p^2}\right)\varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_s^2}\right)\Psi = 0$$

Como buscamos ondas que se amortigüen con la profundidad, proponemos las siguientes

$$\varphi = Ae^{-\propto x_3}e^{ik(x_1-ct)}$$

$$\Psi = Be^{-\beta x_3}e^{ik(x_1-ct)}$$

Donde $\propto$ y β son constantes que se deben determinar, mientras que c es la velocidad de la onda superficial o de Rayleigh. Derivando y remplazando en las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = (ik)^2\varphi$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = A(-\alpha)^2 e^{ik(x_1-ct)}$$

Remplazando en

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_p^2}\right)\varphi = [-k^2 + \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c_p^2}]\varphi = 0$$

De manera similar se realiza los remplazos en la ecuación del potencial vectorial llegando a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2}+\left(\frac{\omega^2}{c_s^2}\right)\Psi=\left[-k^2+\beta^2+\frac{\omega^2}{c_s^2}\right]\Psi=0$$

Quedando dos ecuaciones homogéneo, para que tengan solución distinta de la trivial debe ser cero los corchetes, de donde despejamos ∝ y β .

$$-k^2+\alpha^2+\frac{\omega^2}{c_p^2}=0$$

$$\alpha^2=k^2-\frac{\omega^2}{c_p^2}>0 \quad \text{Como} \quad k=\frac{\omega}{c}$$

$$\alpha^2=k^2-\frac{k^2c^2}{c_p^2}=k^2\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right) \implies \alpha=|k|\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right)}$$

De igual manera se llega

$$\beta=|k|\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{c_s^2}\right)}$$

Puesto que α y β.son números reales

$$1-\frac{c^2}{c_p^2}>0 \;\; \therefore \;\; c_p^2>c^2 \quad \text{y como} \;\; c_s^2>c^2 \implies c<c_s<c_p$$

Hasta aquí solo encontramos α y β.como una relación entre las velocidades pero desconocemos c. Tengamos en cuenta que en ningún momento se usaron las condiciones que deben cumplir las tensiones en la superficie libre del sólido, trabajemos en esa dirección.

Anteriormente encontramos que los desplazamientos en función de los potenciales son

$$u_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}$$

$$u_3=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}$$

Remplazando los potenciales supuestos

$$\varphi = Ae^{-\alpha x_3} e^{ik(x_1 - ct)}$$

$$\Psi = Be^{-\beta x_3} e^{ik(x_1 - ct)}$$

y derivando

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = (ik)\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = (-\alpha)\varphi$$

De igual manera se procede con el otro potencial y remplazando en los desplazamientos queda

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = (ik)\varphi - (-\beta)\Psi$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = (-\alpha)\varphi + (ik)\Psi$$

Las tensiones deben cumplir las condiciones de frontera libre que en nuestro caso son

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0 \text{ y también } \sigma_{23} = 0$$

y como se encontró anteriormente

$$\sigma_{13} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) \right]$$

En nuestro caso queda

$$\sigma_{13} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right] = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right]$$

Remplazando las derivadas

$$2\mu(-\alpha)ik\varphi - \mu(-\beta)^2\Psi + \mu(ik)^2\Psi = 0$$

Simplificando μ y haciendo $x_3 = 0$ queda

$$2\alpha ikA + (\beta^2 + k^2)B = 0$$

De igual manera se procede con

$$\sigma_{33} = 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\right)\right] + \lambda\nabla^2\varphi$$

En nuestro caso queda

$$\sigma_{33} = 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)\right] + \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}\right) = 0$$

Remplazando las derivadas

$$\sigma_{33} = 2\mu[(-\alpha)^2\varphi + (ik)(-\beta)\Psi] + \lambda((ik)^2\varphi + (-\alpha)^2\varphi) = 0$$

Calculando en $x_3 = 0$ y simplificando se obtiene

$$[(2\mu + \lambda)\alpha^2 - \lambda k^2]A - 2ik\mu\beta B = 0$$

Luego se llega a un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son A y B.

$$\begin{pmatrix} 2ik\alpha & (\beta^2+k^2) \\ [(2\mu+\lambda)\alpha^2-\lambda k^2] & -2ik\mu\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

Para que tenga solución no-trivial el determinante debe ser cero

$$\begin{vmatrix} 2ik\alpha & (\beta^2+k^2) \\ [(2\mu+\lambda)\alpha^2-\lambda k^2] & -2ik\mu\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$(k^2+\beta^2)[(2\mu+\lambda)\alpha^2-\lambda k^2] - 2ik\alpha 2ik\mu\beta = 0$$

O bien

$$(k^2+\beta^2)[(2\mu+\lambda)\alpha^2-\lambda k^2] = 4\mu k^2\alpha\beta$$

También podemos despejar B en función de A en la primera de las ecuaciones, que luego usaremos

$$B = \frac{-2\alpha ki}{k^2+\beta^2}$$

Elevando, el desarrollo del determinante, al cuadrado (sin desarrollar los cuadrados) y remplazando los valores de α^2 y β^2 hallados previamente

$$\alpha^2 = k^2\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right)$$

$$\beta^2 = k^2\left(1-\frac{c^2}{c_s^2}\right)$$

$$\left[k^2+k^2\left(1-\frac{c^2}{c_s^2}\right)\right]^2\left[(2\mu+\lambda)k^2\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right)-\lambda k^2\right]^2 = (4k^2\mu)^2k^4\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{c_s^2}\right)$$

Remplazando $c = \frac{\omega}{k}$ y operando

$$\left[2k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}\right]^2\left[2\mu k^2-(2\mu+\lambda)\frac{\omega^2}{c_p^2}\right]^2=16k^4\mu^2\left(1-\frac{\omega^2}{c_p^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{c_s^2}\right)$$

Dividiendo ambos miembros por μ^2k^8 reordenando términos y recordando que

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu}=\frac{c_p^2}{c_s^2}$$

Queda

$$\left(2-\frac{\omega^2}{k^2c_s^2}\right)^2\left(2-\frac{\omega^2}{k^2c_s^2}\right)^2=16\left(1-\frac{\omega^2}{k^2c_p^2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{k^2c_s^2}\right)$$

Llamando

$$\xi^2=\frac{c_s^2}{c_p^2}\quad \text{y}\quad \theta^2=\frac{\omega^2}{k^2c_s^2}$$

Remplazando y desarrollando queda

$$\theta^6-8\theta^4+(24-16\xi^2)\theta^2+16\xi-16$$

Ecuación cubica en θ^2, que nos da la velocidad de las ondas de Rayleigh, que la indicaremos como c_R . La ecuación es comúnmente llamada "*ecuación de Rayleigh".* Resolverla es todo un tema como se verá en la Nota…..aquí solo comentaremos propiedades generales.

Como $c_R=\frac{\omega}{k}=\theta c_S$ como θ es independiente ω y c_S también lo es, luego las ondas de Rayleigh no son dispersivas. Si el medio no es homogéneo, caso de un sólido estratificado las ondas de Rayleigh son dispersivas.

Dado un material queda determinada la velocidad de las ondas de Rayleigh.

Como

$$\xi^2 = \frac{c_s^2}{c_p^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

Entonces el valor de las raíces depende solo del módulo de Poisson. Se puede demostrar que para valores de $0 < \nu < 0{,}5$ la ecuación de Rayleigh tiene solo una raíz. Existe una expresión clásica aproximada de la raíz dada por

$$c_R \approx \frac{0{,}87 + 1{,}12\nu}{1 + \nu} c_s$$

Esta expresión tiene un error de relativo del 0,46% y es válida solo para $0 < \nu$. El grafico siguiente Fig.6.2 compara las tres velocidades relativas a c_s en función del módulo de Poisson.

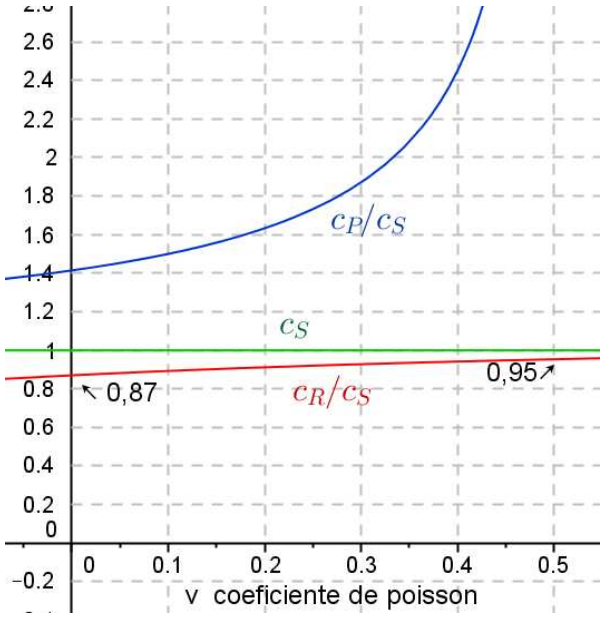


Fig.6.2

Calculemos ahora los desplazamientos

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = (ik)\varphi - (-\beta)\Psi$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = (-\alpha)\varphi + (ik)\Psi$$

Remplazando φ y Ψ

$$u_1 = (ik)\varphi - (-\beta)\Psi = \left[(ik)Ae^{-\alpha x_3} + \beta Be^{-\beta x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)}$$

Aquí c es la velocidad de las ondas de Rayleigh remplazando B en función de A y sacando factor común

$$u_1 = \left[(ik)Ae^{-\alpha x_3} - \frac{2\alpha\beta ki}{k^2+\beta^2}Ae^{-\beta x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)}$$
$$= ikA\left[e^{-\alpha x_3} - \frac{2\alpha\beta}{k^2+\beta^2}e^{-\beta x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)}$$

Tomando la parte real del desplazamiento y solo el valor absoluto

$$Real[u_1] = kA\left(e^{-\alpha x_3} - \frac{2\alpha\beta}{k^2+\beta^2}e^{-\beta x_3}\right)\sin[k(x_1-ct)]$$

Hacemos lo mismo para u_3

$$u_3 = (-\alpha)\varphi + (ik)\Psi = \left[(-\alpha)Ae^{-\alpha x_3} + (ik)(\frac{-2\alpha ki}{k^2+\beta^2})Ae^{-\beta x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)} =$$
$$= \alpha A\left[-e^{-\alpha x_3} + (\frac{2k^2}{k^2+\beta^2})e^{-\beta x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)}$$

$$Real[u_3] = \alpha A\left(-e^{-\alpha x_3} + (\frac{2k^2}{k^2+\beta^2})e^{-\beta x_3}\right)\cos[k(x_1-ct)]$$

En estas expresiones se observa que tanto u_1 comou_3 se propagan como ondas planas en la dirección del eje x_1

Calculemos en un ejemplo numérico de fácil solución los desplazamientos, supongamos que el coeficiente de Poisson es $\nu = \frac{1}{4}$ en este caso como

$$\xi^2 = \frac{c_s^2}{c_p^2} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{3}$$

Remplazando en la ecuación de Rayleigh se llega

$$(\theta^2)^3 - 8(\theta^2)^2 + 18{,}6\theta^2 - 10{,}6 = 0$$

Ecuación de tercer grado en θ^2 de simple solución por calculadora de bolsillo, siendo las raíces:

$$(\theta^2)_1 = 0{,}84 \ ; \ (\theta^2)_2 = 4{,}06 \ ; \ (\theta^2)_3 = 3{,}08$$

Recordando que

$$\theta^2 = \frac{c^2}{{c_S}^2}$$

y como $\alpha^2 = k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_p^2}\right)$ y $\beta^2 = k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)$ vemos que la única solución que no da valor imaginario de β es $(\theta^2)_1 = 0{,}84$, luego

$$\alpha = 0{,}84k \ \text{ y } \ \beta = 0{,}4k$$

También podemos ver en este caso que la velocidad de las ondas de Rayleigh es

$$c = 0{,}91c_s$$

Ahora remplacemos los datos hallados en los desplazamientos y trabajamos solo con las amplitudes con el objeto de estudiar sus variaciones, comencemos por

$$u_1 = kA\left(e^{-\alpha x_3} - \frac{2\alpha\beta}{k^2 + \beta^2}e^{-\beta x_3}\right)\sin[k(x_1 - ct)]$$

$$u_1 = kA\left(e^{-0{,}84kx_3} - \frac{2(0{,}4k)(0{,}84k)}{k^2 + (0{,}4k)^2}e^{-0{,}4kx_3}\right)\sin[k(x_1 - ct)]$$

$$u_1 = kA(e^{-0{,}84kx_3} - 0{,}58e^{-0{,}4kx_3})\sin[k(x_1 - ct)]$$

Las longitudes las medimos en unidades de λ $\therefore \ kx_3 = 2\pi(\frac{x_3}{\lambda}) \Rightarrow 2\pi x_3$ y los desplazamientos los hacemos relativos a los desplazamientos en $x_3 = 0$, luego

$$u_1(x_3 = 0) = 0{,}42kA$$

$$\frac{u_1}{u_1(0)} = \frac{kA}{0{,}42kA}(e^{-0{,}84.2\pi x_3} - 0{,}58e^{-0{,}4.2\pi x_3}) =$$

$$\frac{u_1}{u_1(0)} = \frac{1}{0{,}42}(e^{-5{,}27x_3} - 0{,}58e^{-2{,}51x_3})$$

Procedemos de igual manera con u_3

$$u_3 = \alpha A\left(-e^{-\alpha x_3} + (\frac{2k^2}{k^2+\beta^2})e^{-\beta x_3}\right)\cos[k(x_1 - ct)]$$

$$u_3 = \alpha A\left(-e^{-0{,}84.2\pi x_3} + (\frac{2k^2}{k^2+(0{,}4)^2})e^{-0{,}4.2\pi x_3}\right)\cos[k(x_1 - ct)] =$$

$$u_3 = \alpha A(-e^{-5{,}27x_3} + (1{,}72)e^{-0{,}4.2\pi x_3})\cos[k(x_1 - ct)] =$$

$$\frac{u_3}{u_3(0)} = \frac{1}{0{,}72}(-e^{-5{,}27x_3} + (1{,}72)e^{-2{,}51x_3})$$

Graficando los desplazamientos relativos en función de λ se observa que los dos desplazamientos rápidamente se amortiguan con el aumento de x_3, como regla general se puede decir que, $\frac{u_3}{u_3(0)}$ es prácticamente despreciable cuando la penetración es del orden de λ. También se observa que $\frac{u_1}{u_1(0)}$ se hace cero en las proximidades de 0,2 para pasar a ser negativo. Fig.6.3

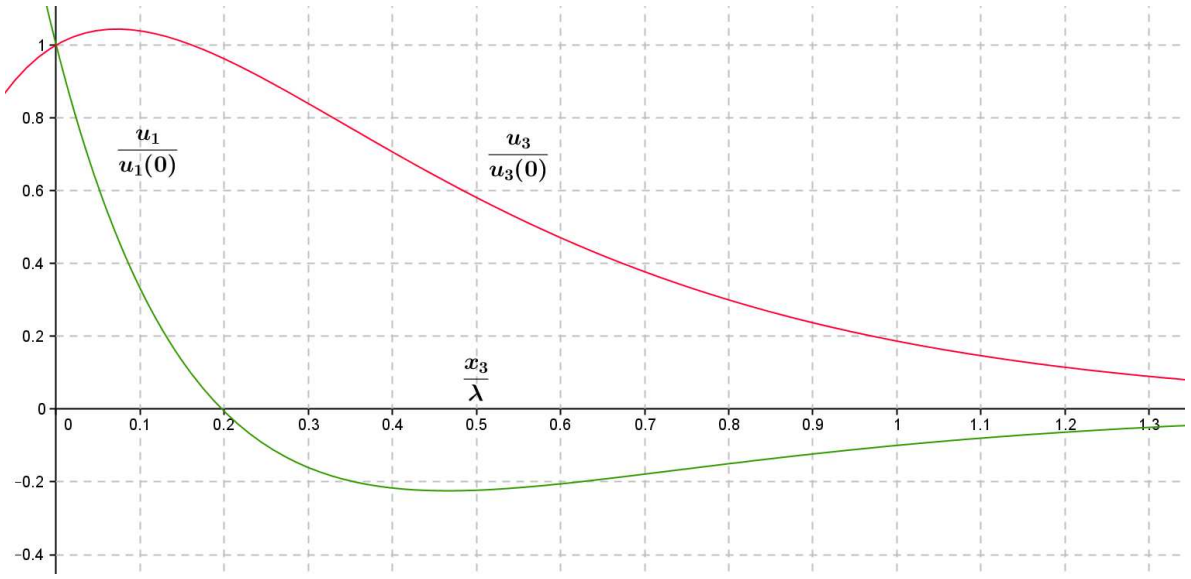


Fig.6.3

Seguidamente veremos el tipo de movimiento que realizan las partículas y el significado del cambio de signo de $\frac{u_1}{u_1(0)}$

Para este estudio tomemos los desplazamientos relativos

$$p = \frac{u_1}{u_1(0)} = \frac{1}{0{,}42}\left(e^{-5{,}27x_3} - 0{,}58e^{-2{,}51x_3}\right)\sin[k(x_1 - ct)]$$

$$q = \frac{u_3}{u_3(0)} = \frac{1}{0{,}72}\left(-e^{-5{,}27x_3} + (1{,}72)e^{-2{,}51x_3}\right)\cos[k(x_1 - ct)]$$

Elevamos al cuadrado y cambiando de termino

$$\frac{p^2}{(\frac{1}{0{,}42})^2(e^{-5{,}27x_3} - 0{,}58e^{-2{,}51x_3})^2} = (\sin[k(x_1 - ct)])^2$$

$$\frac{q^2}{\left(\frac{1}{0{,}72}\right)^2(-e^{-5{,}27x_3} + (1{,}72)e^{-2{,}51x_3})^2} = (\cos[k(x_1 - ct)])^2$$

Sumando miembro a miembro nos queda la ecuación de una elipse, llamando

$$a^2 = (\frac{1}{0{,}42})^2(e^{-5{,}27x_3} - 0{,}58e^{-2{,}51x_3})^2$$

$$b^2 = \left(\frac{1}{0{,}72}\right)^2(-e^{-5{,}27x_3} + (1{,}72)e^{-2{,}51x_3})^2$$

Graficando estas dos funciones Fig.6.4 vemos que siempre el semi-eje mayor de la elipse está en la dirección de x_3, salvo en cero donde coinciden los dos valores. a^2 muestra un punto critico en $\frac{x_3}{\lambda} = 0{,}2$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

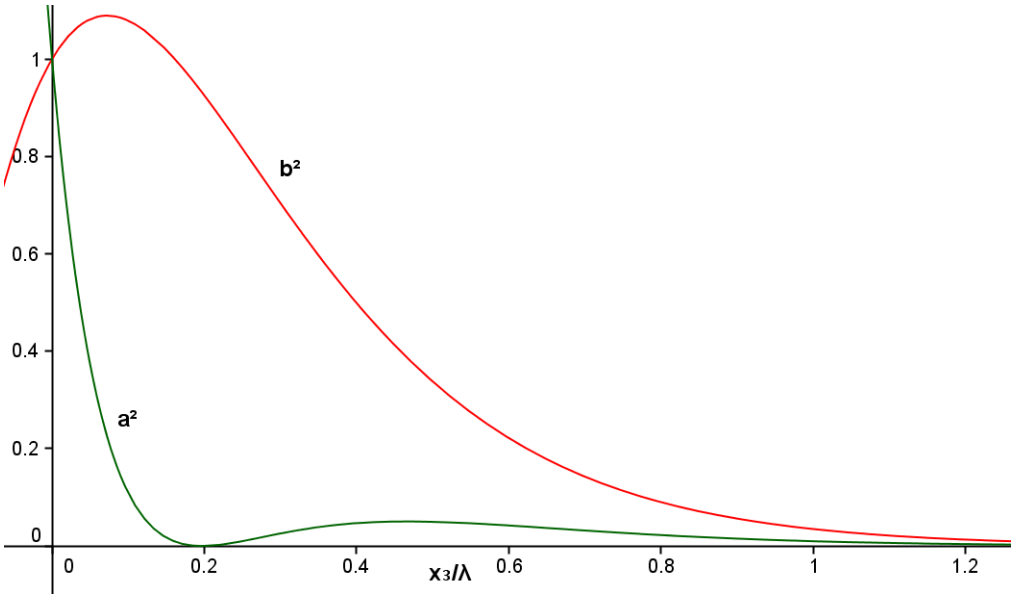


Fig.6.4

Si grafícanos (esquema) las distintas elipses en función de x_3 obtenemos Fig.6.5

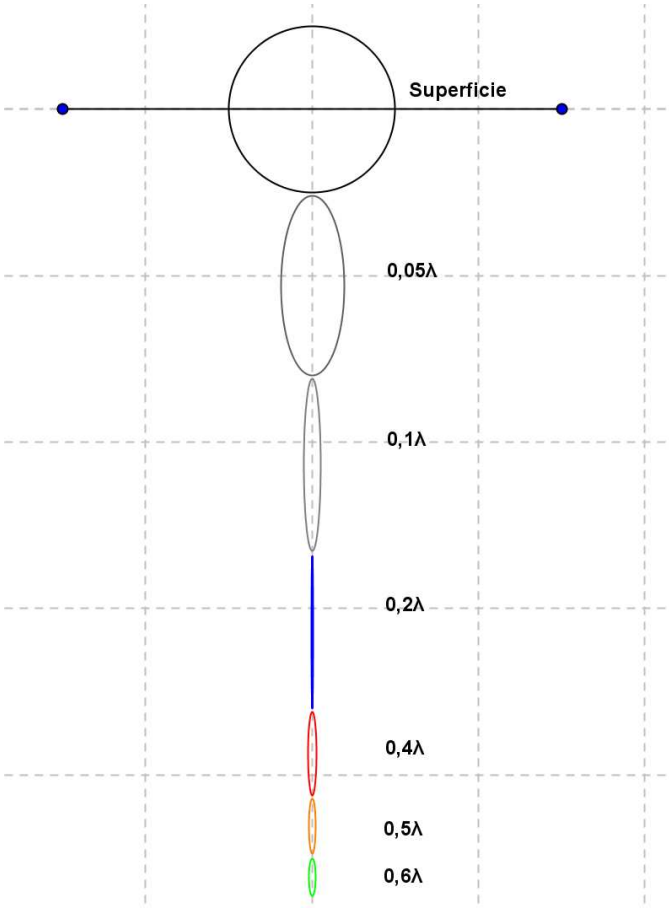


Fig.6.5

En definitiva, vemos que las partículas describen elipse, por esta razón esta velocidad es menor que las dos velocidades anteriormente encontrada las de las ondas-p y ondas-s. En la superficie las partículas ejecutan un movimiento en el sentido de las agujas del reloj respecto a la dirección de propagación. Si se examina el grafico de las elipses, se ve que los ejes mayor y menor de la misma cambian hasta que llegan hasta $0{,}2\lambda$ de la superficie, en este punto, la partícula ejecuta un movimiento solo vertical, ya que $a^2 = 0$. Más abajo vuelve a crecer a^2 retornando las elipses, pero con un sentido de giro de las partículas contrario al anterior (¿Por qué?). Como fue dicho, vemos que a una profundidad de una longitud de onda el movimiento es casi despreciable.

6.2 Ondas de Love

Consideremos un medio homogéneo, isótropo y semi-infinito, sobre el una capa también homogénea e isótropa de espesor constante h. La idea es estudiar la posibilidad de que existan ondas que se propaguen en la dirección x_1 con movimiento transversal (SH) paralelo a la superficie de separación x_2, o sea polarizadas en el plano horizontal. Ambos medios son elásticos y en perfecto contacto. Estas ondas solo tendrían movimiento SH a diferencia de las ondas de Rayleigh que los desplazamientos son P-SV acoplados. Indicamos con el subíndice 1 las constantes de la capa de espesor h y con el subíndice 2 a los parámetros que caracterizan al medio semi-infinito. Luego $c_{1S}^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}$ es la velocidad de las ondas-S en la capa y $c_{2S}^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}$ la velocidad de las ondas-S en el medio semi-infinito. Asumimos que la velocidad en la capa c_{1s}es menor que la velocidad c_{2s}. Denotamos con ω la frecuencia angular de la onda que se propagaría en la dirección de x_1 con velocidad c. Suponemos también que la amplitud puede variar con la profundidad o sea con x_3. Como ya fue comentado estos casos son convenientes resolverlos por medio de los desplazamientos y como el movimiento es tipo SH tenemos que Fig.6.6

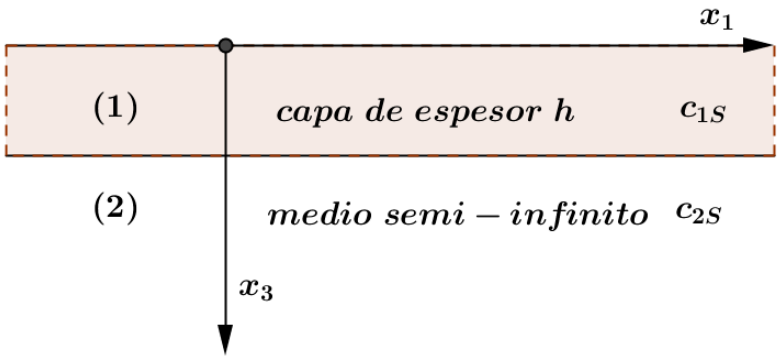


Fig.6.6

$$\vec{u}_{SH} = (0, u_2, 0)$$

Con

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

Suponemos desplazamientos del siguiente tipo

$$u_2 = u_2(x_1, x_3, t) = f(x_3)e^{ik(x_1 - ct)} \quad \text{Para } 0 \leq x_3 \leq h$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_3, t) = g(x_3)e^{ik(x_1 - ct)} \quad \text{Para } h \leq x_3 < \infty$$

Los desplazamientos deben verificar las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 u_2 - \frac{1}{c_{1s}^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 u_2 - \frac{1}{c_{2s}^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$$

Atención, los dos desplazamientos se los llama u_2, pero están en zonas distintas . Remplazando en la ecuación la expresión del desplazamiento solo realizamos las cuentas para el primer caso el otro es equivalente

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_{1s}^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$$

Luego

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c_{1s}^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$$

Calculando

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = (ik)^2 u_2 \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = f^{''}(x_3) e^{ik(x_1 - ct)} \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (ikc)^2 f(x_3)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas

$$(ik)^2 f(x_3) e^{ik(x_1 - ct)} + f^{''}(x_3) e^{ik(x_1 - ct)} - \frac{1}{c_{1s}^2} (ikc)^2 f(x_3) e^{ik(x_1 - ct)} = 0$$

$$(ik)^2 f(x_3) + f^{''}(x_3) - \frac{1}{c_{1s}^2} (ikc)^2 f(x_3) = 0$$

$$f^{''}(x_3) + k^2 \left[\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1 \right] f(x_3) = 0$$

De igual manera se llega a

$$g^{''}(x_3) + k^2 \left[\frac{c^2}{c_{2S}^2} - 1 \right] g(x_3) = 0$$

La solución general de estas dos ecuaciones es

$$f(x_3) = A e^{i\alpha x_3} + B e^{-i\alpha x_3}$$
$$g(x_3) = C e^{i\beta x_3} + D e^{-i\beta x_3}$$

Remplazando la solución en las ecuaciones obtendremos los valores de α y β

$$f^{''}(x_3) = (i\alpha)^2 A e^{i\alpha x_3} + (-i\alpha)^2 B e^{-i\alpha x_3}$$

$$f^{''}(x_3) + k^2 \left[\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1 \right] f(x_3) = 0$$

$$(i\alpha)^2 A e^{i\alpha x_3} + (-i\alpha)^2 B e^{-i\alpha x_3} + k^2 \left[\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1 \right] \left(A e^{i\alpha x_3} + B e^{-i\alpha x_3} \right) ==$$

Operando y ordenando los términos llegamos

$$-\alpha^2 \left(A e^{i\alpha x_3} + B e^{-i\alpha x_3} \right) + k^2 \left[\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1 \right] \left(A e^{i\alpha x_3} + B e^{-i\alpha x_3} \right) = 0$$

$$-\alpha^2 + k^2\left[\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1\right] = 0$$

$$\alpha = |k|\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1}$$

De igual manera se llega

$$\beta = |k|\sqrt{\frac{c^2}{c_{2S}^2} - 1}$$

A, B, C, D son constantes arbitrarías que deben determinarse con las condiciones de contorno. La solución es entonces

$$u_2 = (Ae^{i\alpha x_3} + Be^{-i\alpha x_3})\, e^{ik(x_1 - ct)} \quad \text{Para } 0 \leq x_3 \leq h$$

$$u_2 = \ (Ce^{i\beta x_3} + De^{-i\beta x_3})\, e^{ik(x_1 - ct)} \quad \text{Para } h \leq x_3 < \infty$$

A estas expresiones les debemos hacer cumplir las condiciones de borde en las $x_3 = 0$, $x_3 = h$ y en $x_3 \to \infty$. Las condiciones son:

1.en la superficie libre, la tracción es cero
Recordando

$$\sigma_{23} = \ \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{13} = \ \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{33} = 2\,\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

Como en este caso $\vec{u} = (0,\ u_2, 0)$ y $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$ por tanto solo queda

$$\sigma_{23} = \ \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

Derivando y remplazando, nos queda para $0 \leq x_3 \leq h$

$$\sigma_{23}|_{x_3=0} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0} = \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = 0$$

$$\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = \left\{\mu\left[(i\propto)Ae^{i\alpha x_3} - (i\alpha)Be^{-i\alpha x_3}\right]e^{ik(x_1-ct)}\right\}\Big|_{x_3=0} = 0$$

$$[(i\propto)A - (i\alpha)B] = A - B = 0 \;\rightarrow A = B$$

$$f(x_3) = Ae^{i\alpha x_3} + Be^{-i\alpha x_3} = A\left(e^{i\alpha x_3} + e^{-i\alpha x_3}\right) = 2A\cos(\alpha x_3)$$

2. En la capa semi-infinita la condición que debe cumplir es que cuando $x_3 \rightarrow \infty$ el desplazamiento sea cero $u_2 \rightarrow 0$.

Vemos que para cumplir esta condición los exponentes de

$$u_2 = \left(Ce^{i\beta x_3} + De^{-i\beta x_3}\right)e^{ik(x_1-ct)}$$

Deben ser reales. Recordando que

$$\beta = |k|\sqrt{\frac{c^2}{c_{2S}^2} - 1}$$

Entonces

$$\frac{c^2}{c_{2S}^2} - 1 < 0 \;\therefore\; c < c_{2S}$$

Luego llamamos $\beta = i\acute{\beta}$ entonces donde

$$\acute{\beta} = |k|\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{2S}^2}}$$

$$u_2 = \left(Ce^{-\acute{\beta}x_3} + De^{\acute{\beta}x_3}\right)e^{ik(x_1-ct)}$$

Para que $u_2 \rightarrow 0$ cuando $x_3 \rightarrow \infty$ debe ser cero D, por lo tanto queda

$$g(x_3) = Ce^{-\acute{\beta}x_3}$$

Resta solo las condiciones en la interface.

3. En la interface $x_3 = h$ se debe cumplir,

$$u_2|_{x_3=h}(\text{de la capa}) = u_2|_{x_3=h}(\text{de la semi} - \text{infinito})$$

También debe cumplir

$$\mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h}$$

Hay continuidad de desplazamiento y de tracción. Recordando lo hallado anteriormente

$$u_2 = 2A\cos(\alpha x_3)\ e^{ik(x_1-ct)} \text{ en } 0 \le x_3 \le h$$
$$u_2 = Ce^{-\acute{\beta} x_3}\ e^{ik(x_1-ct)} \text{ en } h \le x_3 < \infty$$

Suponemos que el número de onda k es el mismo en los dos medios. Se debe cumplir la continuidad de desplazamiento, o sea

$$u_2|_{x_3=h} = u_2|_{x_3=h}$$

$$2A\cos(\alpha h)\ e^{ik(x_1-ct)} = Ce^{-\acute{\beta} h}\ e^{ik(x_1-ct)}$$

En definitiva, queda la siguiente ecuación homogénea

$$(2\cos(\alpha h))A - \left(e^{-\acute{\beta} h}\right)C = 0$$

Cumpliendo continuidad de tracción

$$\mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h}$$

$$-2A \propto \mu_1 \operatorname{sen}(\alpha h) = -\mu_2 C\beta e^{-\acute{\beta} h}$$

$$-\left(2 \propto \mu_1 \operatorname{sen}(\alpha h)\right)A + \left(\mu_2 \beta e^{-\acute{\beta} h}\right)C = 0$$

Quedando otra ecuación homogénea, luego tenemos un sistema de dos ecuaciones, para que tenga solución debe se cero en determinante

$$\beta\mu_2 \cos(\alpha h) - \propto \mu_1 \operatorname{sen}(\alpha h) = 0$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha h)}{\cos(\alpha h)} = \frac{\mu_2 \acute{\beta}}{\mu_1 \alpha} = \frac{|k|\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{2S}^2}}}{|k|\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}}$$

$$\text{tg}(\alpha h) = tg\left(\frac{\omega}{c} h \sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}\right) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{2S}^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}}$$

Condición que se debe cumplir para que existan ondas de Love, como se observa esta ecuación no tiene solución analítica los valores de $c(\omega)$ deben ser hallados numéricamente. Se nota que la expresión de la velocidad depende de los parámetros del medio y de la frecuencia, lo cual indica que estas ondas son dispersivas, o sea que se debe conocer la frecuencia para determinar la velocidad. Trabajemos un poco más la ecuación anterior, llamando

$$\eta = \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}$$

$$tg(\omega\eta) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{2S}^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\frac{h}{c}}{\frac{h}{c}}\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{c_{2S}^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2}-1}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{h^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c_{2S}^2}\right)}}{\eta}$$

Sumando y restando dentro de la raíz el término $\frac{1}{c_{1S}^2}$ y agrupando queda

$$tg(\omega\eta) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{h^2\left(\frac{1}{c_{1S}^2}-\frac{1}{c_{2S}^2}\right)-\eta^2}}{\eta}$$

Graficando Fig.6.7 la $tg(\omega\eta)$ por un lado y en el mismo grafico la expresión de la derecha de la ecuación, los puntos donde se cortan nos da los valores de η por

medio de los cuales hallamos *c*, valor de la velocidad las ondas de Love en ese medio.

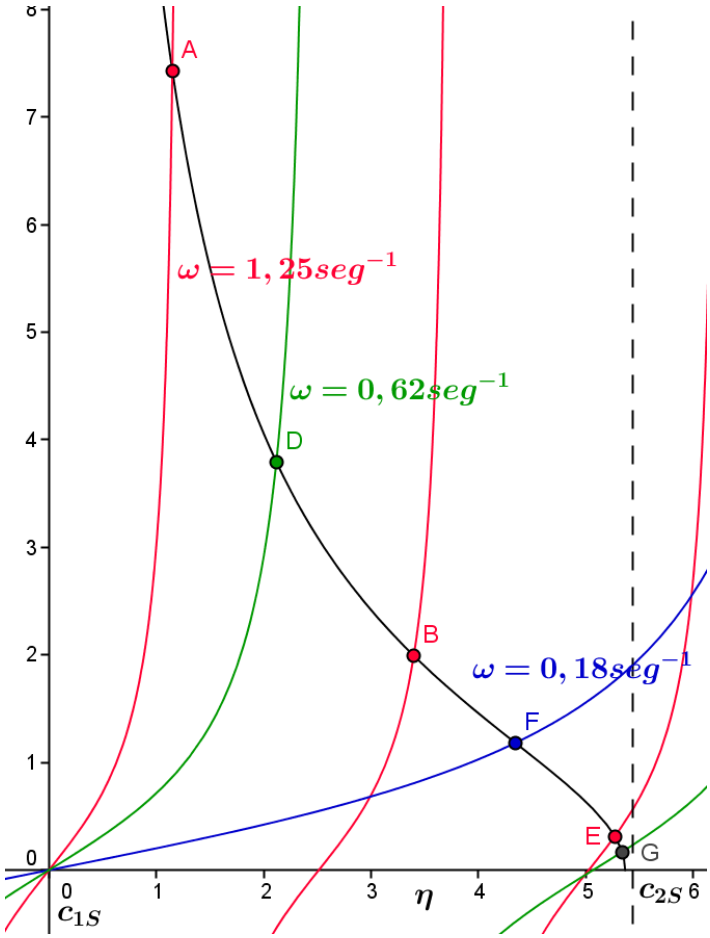


Fig.6.7

Ejemplo

Resolvamos un clásico ejercicio de sísmica, supongamos los siguientes datos:

$c_{1S} = 3{,}9\ {}^{km}/_{S} \quad \rho_1 = 2{,}8\ {}^{g}/_{cm^3} \quad h = 40\ km$

$c_{2S} = 4{,}6\ {}^{km}/_{S} \quad \rho_2 = 3{,}3\ {}^{g}/_{cm^3} \quad \text{frecuencias} = 0{,}2Hz\ ;\ 0{,}1Hz\ ;\ 0{,}03Hz$

Calculo de los módulos de corte μ

$$c_{1S}^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1} \rightarrow \mu_1 = c_{1S}^2 \rho_1 = \left(3{,}9\ {}^{km}/_{seg}\right)^2 2{,}8\ {}^{g}/_{cm^3} = 42{,}6 \frac{km^2 g}{seg^2 cm^3}$$

$$c_{2S}^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2} \rightarrow \mu_2 = c_{2S}^2 \rho_2 = \left(4{,}6\ {}^{km}/_{seg}\right)^2 3{,}3\ {}^{g}/_{cm^3} = 69{,}8\frac{km^2 g}{seg^2 cm^3}$$

Remplazando en

$$tg(\omega\eta) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{h^2\left(\frac{1}{c_{1S}^2} - \frac{1}{c_{2S}^2}\right) - \eta^2}}{\eta} =$$

$$= \frac{69{,}8\frac{km^2 g}{seg^2 cm^3}}{42{,}6\frac{km^2 g}{seg^2 cm^3}}\frac{\sqrt{(40\ km)^2\left(\frac{1}{\left(3{,}9\ {}^{km}/_{seg}\right)^2} - \frac{1}{\left(4{,}6\ {}^{km}/_{seg}\right)^2}\right) - \eta^2}}{\eta} =$$

$$tg(\omega\eta) = 1{,}63\frac{\sqrt{28{,}8seg^2 - \eta^2}}{\eta}$$

Graficando por un lado la $tg(\omega\eta)$ y simultáneamente $1{,}63\frac{\sqrt{28{,}8seg^2-\eta^2}}{\eta}$, donde se cortan ambas curvas tendremos el valor de η luego despejamos c. Se observa que debemos conocer $\omega = 2\pi 0{,}2Hz = 1{,}25\frac{1}{seg}$

$$tg\left(1{,}25\frac{1}{seg}\eta\right) = 1{,}63\frac{\sqrt{28{,}8seg^2 - \eta^2}}{\eta}$$

La velocidad de las ondas de Love debe estar comprendida entre $c_{1S} < c < c_{2S}$, veamos que valores toma η cuando $c = c_{1S}$ y $c = c_{2S}$ remplazando

$$\eta = \frac{h}{c}\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1}$$

para $c = c_{1S} \rightarrow \eta = 0$ y $c = c_{2S} \rightarrow \eta = 5{,}44seg$,punto que también se lo observa en la gráfica.

Los gráficos fueron realizados para tres frecuencias $0{,}2Hz\ (\omega = 1{,}25);\ 0{,}1Hz(\omega = 0{,}62);\ 0{,}03Hz\ (\omega = 0{,}18)$ que se corresponden con la ecuación de la tangente,

cada color representa una frecuencia. Se observa que para cada frecuencia hay un número finito de soluciones, (intercepciones con la curva negra), por ejemplo para la frecuencia más alta $0{,}2Hz$ $(\omega = 1{,}25)$ tenemos tres soluciones (puntos rojos A; B; E). A medida que la frecuencia disminuye hoy menos soluciones. La frecuencia más baja solo tiene una velocidad posible (punto azul F). Para la raíz $\eta_1 = 1{,}15seg$ (punto A), despejando c de la expresión que define η

$$c^2 = \frac{c_{1S}^2 h^2}{h^2 - \eta^2 c_{1S}^2}$$

Remplazando los valores se llega a la menor de las velocidades de la onda de Love $c = 3{,}9\,{}^{km}/_{seg}$, modo fundamental, para la frecuencia de $\omega = 1{,}25\,Hz$, vemos que hay otras dos raíces que dan $\eta_2 = 3{,}4seg$, $\eta_3 = 5{,}27seg$.

La solución numérica de la ecuación por el método de Newton-Raphson en la zona correspondiente a $0 \leq \eta \leq 6$ arroja soluciones negativas que las despreciamos, siendo las dos primeras positivas $\eta_1 = 1{,}149seg$ y $\eta_2 = 3{,}39seg$.

Se destaca, que hay tantas raíces como ceros tenga la tangente menores al valor de η correspondiente a la velocidad en el medio semi-infinito (c_{2s}). Los ceros de la tangente son:

$$tg(1{,}25\eta) = 0 \;\; \rightarrow 1{,}25\eta_n = n\pi \quad \text{para} \;\; n \in (0{,}1{,}2{,} \ldots n)$$

$$\eta_0 = 0 \;\; , \;\; \eta_1 = 2{,}5S \quad \eta_2 = 5{,}02S \quad \eta_3 = 7{,}5S$$

vemos que $\eta_3 > \eta_{2S}$ luego tenemos tres raíces.

Otro ejemplo: Estudiemos la posibilidad de existencias de ondas de Love a frecuencias altas y pequeños espesores, por ejemplo, un sustrato de titanio sobre el cual se depositó una fina capa de oro.

- Oro $c_{1S} = 0{,}120\,\frac{cm}{\mu S} \quad \rho_O = 19{,}32\,\frac{gm}{cm^3}$
- Titanio $c_{2S} = 0{,}331\,\frac{cm}{\mu S} \quad \rho_O = 4{,}50\,\frac{gm}{cm^3}$
- Espesor $h = 0{,}1cm$.
- Frecuencia = 1Mhz

Calculemos primero las curvas de dispersión, como

$$tg(\omega\eta) = 0 \rightarrow \omega\eta = n\pi \qquad n \in (0,1,2,\ldots n)$$

$$\eta\omega = \frac{h}{c}\omega\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1} = h\omega\sqrt{\frac{1}{c_{1S}^2} - \frac{1}{c^2}} = n\pi$$

Despejando la posible velocidad c se llega

$$c = \frac{2fhc_{1S}}{\sqrt{(2fh)^2 - (nc_{1S})^2}}$$

Remplazando los valores correspondientes

$$c = \frac{2f0{,}1cm(0{,}120\frac{cm}{\mu seg})}{\sqrt{(2f0{,}1cm)^2 - \left(n0{,}120\frac{cm}{\mu seg}\right)^2}}$$

Se ve que las unidades son coherentes, la velocidad estará medida en $\frac{cm}{\mu seg}$ y la frecuencia en $\frac{1}{\mu seg}$ graficando obtenemos las curvas de dispersión. Fig.6.8

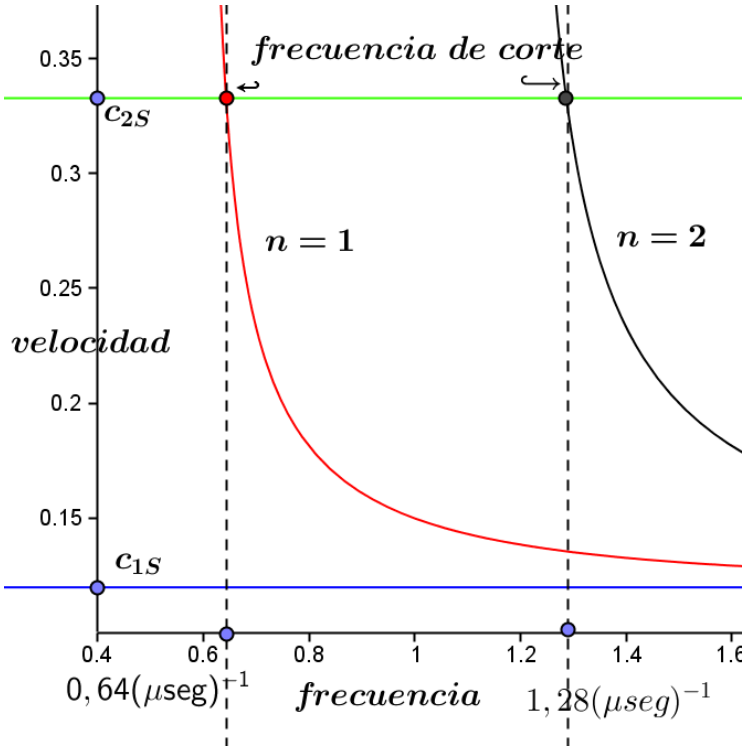


Fig.6.8

Observamos que para el modo $n = 1$ la frecuencia de corte es $0{,}64\frac{1}{\mu s} = 0{,}64x10^6 Hz = 640000 Hz$.

Pasemos ahora al cálculo grafico de las velocidades, para tal fin recordemos la expresión

$$tg(\omega\eta) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{h^2\left(\frac{1}{c_{1S}^2} - \frac{1}{c_{2S}^2}\right) - \eta^2}}{\eta}$$

Calculo de los μ

$$\mu_1(oro) = c_{1S}^2\rho_1 = (0{,}120\frac{cm}{\mu seg})^2.19{,}32\frac{gr}{cm^3} = 0{,}278\frac{gr}{\mu seg cm^2}$$
$$\mu_2(titanio) = c_{2S}^2\rho_2 = (0{,}331\frac{cm}{\mu seg})^2.4{,}50\frac{gr}{cm^3} = 0{,}493\frac{gr}{\mu seg cm^2}$$

Calculo de las raíces

$$tg(\omega\eta) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{h^2\left(\frac{1}{c_{1S}^2} - \frac{1}{c_{2S}^2}\right) - \eta^2}}{\eta}$$

Remplazando valores

$$tg\left(6{,}28.\frac{1}{\mu seg}\eta\right) = \frac{0{,}493\frac{gr}{\mu seg cm^2}}{0{,}278\frac{gr}{\mu seg cm^2}}\frac{\sqrt{0{,}1^2\left(\frac{1}{(0{,}120\frac{cm}{\mu seg})^2} - \frac{1}{(0{,}331\frac{cm}{\mu seg})^2}\right) - \eta^2}}{\eta}$$

$$tg(6{,}28.\eta) = 1{,}77\frac{\sqrt{0{,}60 - \eta^2}}{\eta}$$

Graficando las dos curvas de la igualdad como fue realizado en el ejemplo anterior se obtiene en las intercepciones las dos posibles velocidades de la onda de Love.

Vemos que hay dos posibles velocidades, correspondientes a $\eta_1 = 0{,}22\mu seg$ y $\eta_2 = 0{,}64\mu seg$, que corresponden a las siguientes velocidades Fig.6.9

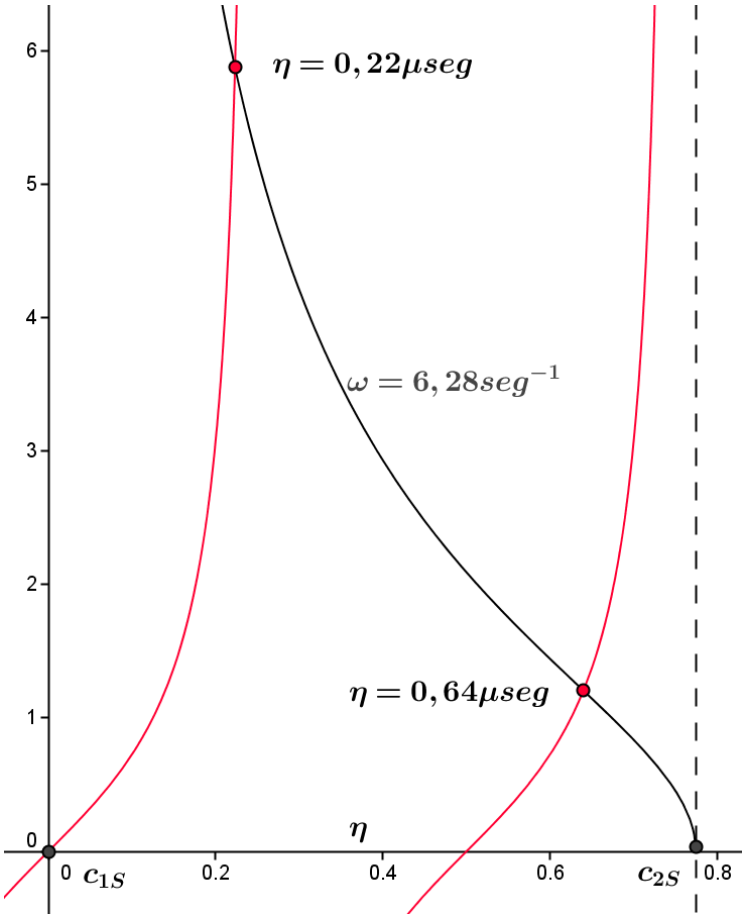


Fig.6.9

$$c^2 = \frac{c_{1S}^2 h^2}{h^2 - \eta^2 c_{1S}^2}$$

$$c^2 = \frac{\left(0{,}120\frac{cm}{\mu seg}\right)^2 (0{,}1cm)^2}{(0{,}1cm)^2 - (0{,}22\mu seg)^2\left(0{,}120\frac{cm}{\mu seg}\right)^2} \rightarrow c = 0{,}124\frac{cm}{\mu seg}$$

Mientras que para la otra raíz da $c = 0{,}187\frac{cm}{\mu seg}$.

Las raíces por el método de Newton-Raphson dan $\eta_1 = 0{,}223\mu seg$ y $\eta_2 = 0{,}640\mu seg$

Para tener totalmente resuelto el problema resta encontrar los desplazamientos, para tal fin tómenos las expresiones de los desplazamientos y del sistema de ecuaciones homogéneo que se arribó anteriormente y despejamos c,

$$u_2 = 2A\cos(\alpha x_3)\ e^{ik(x_1-ct)} \text{ en } 0 \le x_3 \le h$$
$$u_2 = Ce^{-\acute{\beta}x_3}\ e^{ik(x_1-ct)} \text{ en } h \le x_3 < \infty$$

$$(2\cos(\alpha h))A - \left(e^{-\acute{\beta}h}\right)C = 0$$

Luego

$$c = \frac{2A\cos(\alpha h)}{e^{-\acute{\beta}h}}$$

Remplazando en el desplazamiento se obtiene

$$u_2 = \frac{2A\cos(\alpha h)\, e^{-\acute{\beta}x_3}}{e^{-\acute{\beta}h}} e^{ik(x_1-ct)} \text{ en } h \le x_3 < \infty$$

Ahora calculemos, α y $\acute{\beta}$ y suponemos $A = 1$

$$\alpha = |k|\sqrt{\frac{c^2}{c_{1S}^2} - 1} = \frac{6.28\mu seg^{-1}}{0.124\frac{cm}{\mu seg^{-1}}}\sqrt{\frac{(0.124\frac{cm}{\mu seg})^2}{(0.12\frac{cm}{\mu seg})^2} - 1} = 13.10cm^{-1}$$

$$\acute{\beta} = |k|\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{2S}^2}} = \frac{6.28\mu seg^{-1}}{0.124\frac{cm}{\mu seg^{-1}}}\sqrt{1 - \frac{(0.124\frac{cm}{\mu seg})^2}{(0.331\frac{cm}{\mu seg})^2}} = 46.95cm^{-1}$$

Sustituyendo los valores numéricos para el u_2 correspondiente al intervalo $0 \le x_3 \le h$

$$u_2 = 2A\cos(\alpha x_3)\ e^{ik(x_1-ct)} = 2\cos(13.10cm^{-1}x_3)e^{i50.64cm^{-1}(x_1-0.124\frac{cm}{\mu seg}t)}$$

Ahora para el u_2 correspondiente al intervalo $h \leq x_3 < \infty$

$$u_2 = \frac{2A\cos(\alpha h)}{e^{-\acute{\beta}h}} e^{-\acute{\beta}x_3} e^{ik(x_1 - ct)} =$$

$$\frac{2\cos(13.10cm^{-1}0.1cm)}{e^{-46.95cm^{-1}0.1cm}} e^{-46.95cm^{-1}x_3} e^{i50.64cm^{-1}(x_1 - 0.124\frac{cm}{\mu seg}t)} =$$

$$= 2\cos(1.31)\, e^{46.95cm^{-1}(0.1cm - x_3)} e^{i50.64cm^{-1}(x_1 - 0.124\frac{cm}{\mu seg}t)}$$

Tomando componente real y graficando solo la amplitud de las dos ondas, nos queda Fig.6.10

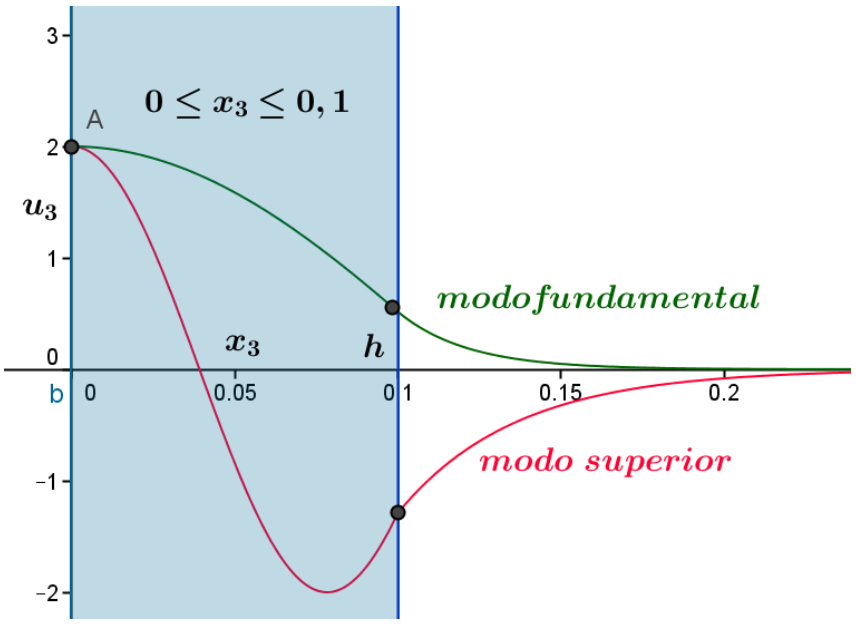


Fig.6.10

Calculemos los modo superior que en nuestro caso tenemos solo uno y corresponde a la segunda velocidad hallada $c = 0{,}187\frac{cm}{\mu seg}$ Para ello debemos hallar nuevamente α y $\acute{\beta}$ cuyos valores son los siguientes $\alpha = 40{,}13cm^{-1}$ y $\acute{\beta} = 27{,}70cm^{-1}$ y repetir los cálculos anteriores con estos nuevos valores. Ambos modos se observan en la gráfica, de color verde el fundamental y rojo el superior.

En la gráfica se observa: que la amplitud de la oscilación es siempre máxima para todos los modos en la superficie libre, teniendo ceros en el interior del

recubrimiento en los modos superior (tantos ceros como modos tenga), en el medio semi-infinito la amplitud disminuye exponencialmente, también, como era de espera, se observa la continuidad de las funciones y su derivada en $h = 0.1cm$.

Para terminar con las ondas superficiales presentamos un esquema donde se han representado las dos ondas superficiales estudiadas, Rayleigh y Love, ambas generadas por una única fuente, propagándose en dirección x_1.Observandoce la forma de propagación de cada una de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Aquí encontrará bibliografía para distintos niveles de conocimiento y en tres idiomas

Ondas

- Bedford A., Drumheller D. S. - *"Introduction to Elastic Wave Propagation"* - Ed. John Wiley and Sons (1996).
- *"Le onde elastiche"* http://www.unife.it/interfacolta/lm.preistoria/insegnamenti/geofisica-applicata-per-larcheologia/materiale-didattico/dispense-aa-2015-2016/onde%20elastiche.pdf
- Graff K. F - *"Wave Motion in Elastic Solids"* - Ed. Dover Publications (1991).
- Coulson C. A. - *"Wave"* - Ed. Oxford, Cambridge (1944) - Traducido al Español por Ed. Dossat S.A.
- Kinsler L. E., Frey A. R., Coppens A. B., Sanders J. V. - *"Fundamentals of Acoustics"* - Ed. John Wiley & Sons (1990) - Traducido al Español por Ed. Limusa.
- Hudson J.A. - *"The Excitation and Propagation of Elastic Wave"* - Cambridge University Press (1980).
- *"Le onde elastiche: grandezze fisiche e fenomeni tipici"* http://www.ceredaclaudio.it/scienza/corsofisica/ce0402teondeelastiche.pdf
- Elmore W. C., Heald M.A. - *"Physics of Waves"*- Ed. Dover Publications (1969).
- Towne D.H. - *"Wave Phenomena"* - Ed. Dover Publications (1967).
- Rossing T.D., Fletcher N.H. - *"Principles of Vibration and Sound"* - Ed. Springer-Verlag (1995).
- Kline R.A. - *"Nondestructive Characterization of Composite Media"* - Technomic Publication (1992).
- French A. P.- *"Vibration and Wave"* - Ed. W.W. Norton & Company, MIT (1993). Traducido al español por Ed. Reverté S.A.
- Bourbié T., Coussy O., Zinszner B. - *"Acoustics of Porous Media"* - Ed. Gulf Publishing Company (1987).
- *"Le onde sismiche"* https://people.unica.it/gianpierodeidda/files/2017/02/Cap_1-Le-Onde-Sismiche.pdf
- Hueter T.F., Bolt R.H. - *"Sonics"* - Ed. John Wiley (1955).

- *"Materials Analysis by Ultrasonics"* - Edited by Alex Vary, Noyes Data Corporation *(*1987).
- Recuero M. - *"Ingeniería Acústica"* - Ed. Paraninfo S.A. (1995).
- Schmerr L.W.(Jr) - *"Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation"* - Ed. Plenum Press (1998).
- Supriyo Datta - *"Surface Acoustic Wave Devices"* - Ed. Prentice-Hall (1986).
- D.G. Crighton D.G., Dowling A.P., Ffowcs Williams J.E., Heckl M.A., Leppington M.F.G. – "*Modern Methods in Analytical Acoustics"* - Ed. Springer-Verlag (1992).
- Davis J.L. - *"Mathematics of Wave Propagation"* - Ed. Princeton University Press (2000).
- Tsai C.S. - *"Guided-Wave Acoustic-Optics"* - Ed. Springer-Verlag (1990).
- Ristic V.M. - *"Principles of Acoustic Devices"* - Ed. John Wiley & Sons (1983).
- Frank S. Crawford F.S.(Jr) - *"Wave"* - Ed. Mc Graw-Hill Inc. (1968). Traducido al español por Ed. Reverté S.A. (1971).
- *"Ultrasonic, Instruments & Devices"* - Ed. Emmanuel Papadakis, Academic Press (1999).
- *"Onde elastiche e suoni"* http://www.roma1.infn.it/rog/pallottino/bacheca/III-1-3%20Onde%20elastiche%20e%20suoni.pdf
- Ensminger D. - *"Ultrasonics"* - Ed. Marcel Dekker Inc.(1988).
- Morse P.M., Uno Ingard K - *"Theoretical Acoustics"* - Ed. Mc Graw-Hill, Book Company (1968).
- Truell R., Elbaum C., Chick B.B. - *"Ultrasonic Methods in Solid State Physics"* - Ed. Academic Press (1969).
- *"Research Techniques in Nondestrutive Testing"* - Ed. R. S. Sharper Academic Press (1977).
- Krautkrämer J., Krautkrämer H. - *"Ultrasonic Testing of Materials"* - Ed. Springer–Verlag (1977).
- Keiiti Aki, Richards P.G. - *"Quantitative Seismology, Theory and Methods"* Vol 1, 2. - Ed. W. H. Freeman and Company (1980).
- Kolsky H. - *"Stress waves in Solids"* - Ed. Dover Publications (1963).

Tensores

- Santalo L.A. - *"Vectores y Tensores",* con sus aplicaciones – Ed. EUDEBA.
- Wrede R.C. - *"Introduction to Vector and Tensor Analysis"* - Ed. Dover Publications.

- Sokolnikoff I.S. - *"Tensor Analisis"* - Ed. John Wiley and Sons. Traducido al español por Ed. Limusa.
- Borrelli A. - Meccanica dei Continui, Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Ferrara brs@unife.it, http://m.docente.unife.it/alessandra.borrelli/dispense-meccanica-dei-continui/meccanica%20dei%20continui-%2013.pdf
- Kay D.C. - *"Tensor Calculus"* - Ed. McGraw-Hill. Traducción al español: Serie de Compendios Schaum - Ed. McGraw-Hill.
- Salete E., Cruces J., de la Fuente P. - *"Análisis Vectorial y Tensorial"* - Universidad Politécnica de Madrid.

Ondas Elásticas en Sólidos

Física de la propagación de las ondas elásticas y algunas aplicaciones

José. E. Ruzzante

Año 2020

ISBN: 978-987-86-6502-3